KunthavaiNaacchiyaar Govt. Arts College for Women (Autonomous),

Thajavur-7.

(Affliated to Bharathidasan University, Tiruchirappalli)

DEPARTMENT OF PHYSICS

I B.Sc., Physics

MECHANICS AND RELATIVITY

Code: **18K2P03**

Prepared by,

1. **Mrs. K. Saritha**,
   (Unit I and III)
   Lecturer inPhysics,
   K. N. G. A. College,
   Thanjavur.

2. **Dr. N. NishaBanu**,
   (Unit II and III)
   Lecturer inPhysics,
   K. N. G. A. College,
   Thanjavur.

UNIT-I

Projectile and Impact of Elastic Bodies

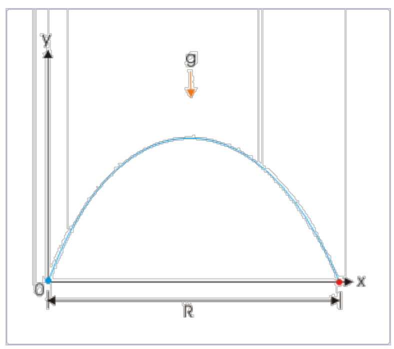
Projectile-path and range of projectile-Impulse of a force-Laws of impact of a smooth sphere on a smooth fixed horizontal plane-Direct and oblique impact between two smooth spheres- Loss of kinetic energy due to direct and oblique impacts.

Projectile

A projectile is any object thrown by the exertion of a force. It can also be defined as an object launched into the space and allowed to move free under the influence of gravity and air resistance. Although any object in motion through space (for example a thrown baseball, kicked football, fired bullet, thrown arrow, stone released from catapult) may be called projectiles, they are commonly found in warfare and sports. Mathematical equation of motion are used to analyze projectiletrajectories.

Path and Range of the Projectile

The range of the projectile is the displacement in the horizontal direction. There is no acceleration in this direction since gravity only acts vertically. shows the line of range. Like time of flight and maximum height, the range of the projectile is a function of initial speed.



Consider a point P as the position of particle, after time t seconds with x and y as co-ordinates.

The equation of the path of a projectile or the equation of trajectory is given by

$$y = x\tan\alpha - g.\frac{x^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

The time of flight (t) of a projectile on a horizontal plane is given by

$$t = 2u\sin\alpha/g$$

The horizontal range (R) of a projectile is given by

$$R = u^2\sin 2\alpha/g$$

When the projectile is projected on a downward inclined plane, then

$$R = 2u^2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha/g\cos^2\beta$$

Impulse of a force:

The product of average force_and the time it is exerted is called the impulse From the Newtons law

$$F_{average} = ma_{average} = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

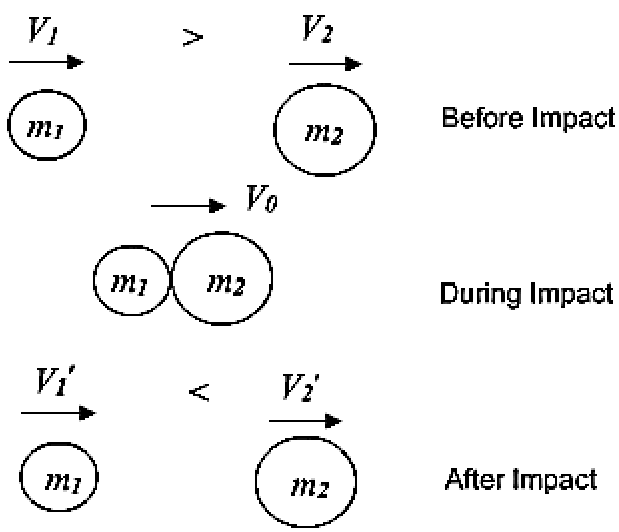
the impulse of force can be extracted and found to be equal to the change in momentum of an object provided the mass is constant:

$$Impulse = F_{average}\Delta t = m\Delta v$$

Direct Impact between two smooth sphere

Let a smooth sphere of massm1 moving with a velocity u1 impinge directly on another smooth sphere of mass m2 moving with velocity u2 in the same direction. By the principle of conservation of momentum the total momentum after the impact along the common normal at the point of contact is equal to the total momentum before impact in the same direction

m1v1+m2v2=m1u1+m2u2----------------------(1)



v1-v2=-e(u1-u2)-------------------------------------(2)

multiplying eqn(2) by m2 and adding (1)

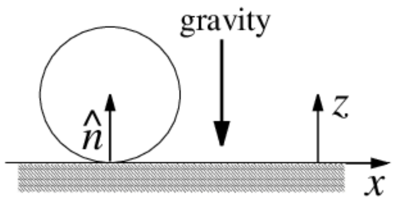
v1=m2u2(1-e)+u1(m1-em2)/(m1+m2)-------------------(3)

multiplying eqn(2) by m21and subtracting from (1)

v2=m1u1(1-e+u2(m2-em1)/(m1+m2)----------------------(4)

Equation (3) and (4) gives the velocities of two spheres after impact along the common normal.

Impact of a smooth sphere on a fixed horizontal plane



Let a smooth sphere of mass m and whose coefficient of restitution is e, impinge obliquely on a smooth fixed horizontal plane.By Newtons experimental law,

$$V\cos\theta - 0 = -e[-u\cos\alpha - 0] \quad \text{------------------(1)}$$

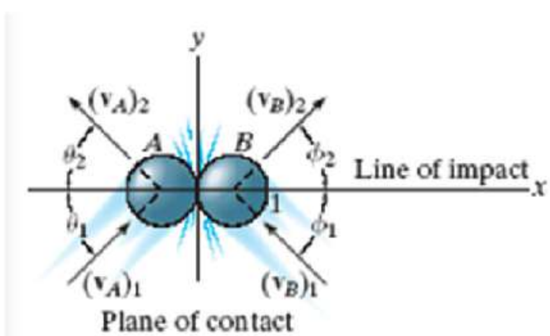
$$V\sin\theta = u\sin\alpha \quad \text{------------- --------------------(2)}$$

Divinding eqn (2)by eqn(1)

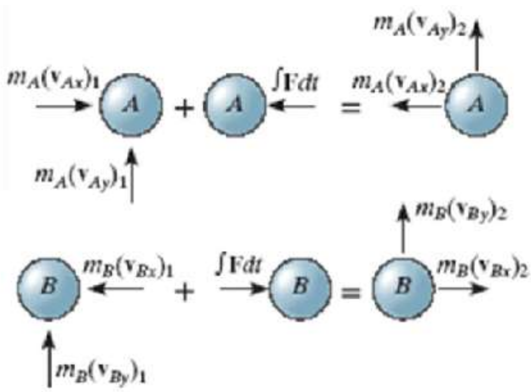
$$\tan\theta = \tan\alpha / e \quad \text{-----------------------------------(3)}$$

Oblique Impact between two smooth sphere

In an oblique impact, one or both of the particles' motion is at an angle to the line of impact. Typically, there will be four unknowns: the magnitudes and directions of the final velocities.



The four equations required to solve for the unknowns are:



Conservation of momentum and the coefficient of restitution equation are applied along the line

of impact (x-axis):

$m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 = m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2$

$e = [(v_{Bx})_2 – (v_{Ax})_2]/[(v_{Ax})_1 – (v_{Bx})_1]$

Momentum of each particle is conserved in the direction perpendicular to the line of impact (y-axis):

$m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2$ and $m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2$

Loss of kinetic energy due to direct impact between two smooth sphere:

The sphere of mass m1 is in the direction O1O2 while the impulse of the mass on m2 is also I but is in the direction O1O2.

The change in the K. E. of m1 = ½ m1($v1^2$-$u1^2$)

I= m1 (v1-u1)

Therefore change in K. E. of m1= ½ I (v1+u1)

The change in the K.E. of the sphere m2

= m1m2 (1-e^2) (u1-u2)2/2(m1+m2)

Loss of K. E. due to direct impact between the spheres

=m1m2(1-e^2)(u1-u2)2/2(m1+m2)=1/2 I(u1-u2)(1-e^2)

Loss of kinetic energy due to oblique impact between two smooth sphere:

Since the velocities of the spheres perpendicular to common normal remain unaltered , due to the oblique impact between two smooth sphere there can be no loss in K. E. perpendicular to the common normal. Loss of K. E. due to oblique impact

=m1m2(1-e^2)(u1 cos α -u2cosβ/2(m1+m2)

UNIT - 1

எறிபொருள்கள் :

ஒரு பொருளை ஒரு குறிப்பிட்ட திசைவேகத்தில் ஒரு ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் சாய்வாக எறிவதாகக் கொள்வோம். இப்படிப்பட்ட பொருளை எறிபொருள் என்பர். எறிபொருளின் மீது ஈர்ப்பு விசையும், காற்றின் தடையும் செயல்படுகிறது. இவ்வகையான துகள்களின் இயக்கத்தைப் பற்றி ஆராயும் போது 'g' ன் மதிப்பு மாறாமல் இருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகிறது. அதாவது காற்றின் தடை கணக்கில் எடுத்து கொள்ளப்படுவதில்லை.

வரையறைகள் (Definition)

எறிபொருள் எந்த புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகிறதோ அப்புள்ளியை எறிதானம் (point of projection) என்பர்.

ஆரம்பத்தில் பொருள் எறியப்படும் திசையானது எறிதானம் வழியாகச் செல்லும் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் எறிகோணம் (angle of projection) என்பர்.

எறிபொருள் செல்கின்ற பாதையை எறிபுள்ளி வழியாக செல்கின்ற தளத்தை தொடுகின்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் எறிப்பொருளின் நெடுக்கம் என்பர்.

எறிபொருளை ஆய்வதற்கான இரு தத்துவங்கள் : எறிபொருளின் ஆரம்ப திசைவேகத்தை இரு கூறுகளாக பிரிக்கலாம்.

1. செங்குத்து கூறு
2. கிடைமட்ட கூறு

எறிபொருளின் மீது செயற்படுகின்ற ஈர்ப்பு விசை நேராக கீழ்நோக்கி செயற்படுகிறது. ஆகவே இவ்விசையானது பொருளின் கிடைமட்ட இயக்கத்தையும் பாதிக்கிறது. அதாவது திசைவேகம் குறைகிறது. இவ்விரண்டினையும் எறிபொருள் இயக்கம் பற்றி ஆராயும்போது, கணக்கில் கொள்ள வேண்டும். ஒரே உயரத்தில் இருந்து விழுமாறு செய்வதால், அவை தரையை தொடும் திசைவேகம் ஒன்றாகும். ஆனால் இவை தரையை பட்டு எழும் திசைவேகம் மாறுபடுகிறது - ஆகவே

அவை எழும்புகின்ற உயரம் வேறுபடுகிறது. திடப்பொருள்களின் மீட்சியல் தன்மை காரணமாக பொருள் மோதும் போது, திசைவேகம் மாறுகிறது.

மோதலுக்கு முன், இரண்டு பொருட்களின் இயக்கத்திசை அவை இரண்டும் தொடுகின்ற புள்ளியில் உள்ள நேர்குத்துக் கோட்டு திசையில் இருப்பின் அம்மோதலை நேர்மோதல் என்பர்.

மோதலுக்கான விதி :

1. நியூட்டன் சோதனை விதி :

மீட்சியல் பொருட்களால் மோதல் பற்றி ஆராய்ந்து நியூட்டன் கீழ்கண்ட விதிகளை வரைந்தார்.

இரு பொருட்களுக்கிடையே நேர்மோதல் ஏற்படும் போது, மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் ஒப்புத் திசைவேகத்திற்கும் உள்ள விகிதம் மாறிலியாகவும் எதிர்குறியுடையதாகவும் அமையும்.

இம்மாறிலி, தனைமீட்சி எண் (Co-efficient of resitivity) என்பர். இது e எனும் எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது.

மோதுகின்ற இரு பொருட்களின் பொது நேர்குத்து திசையில் மோதலுக்கு முன் உள்ள திசைவேக கூறுகள் u_1, u_2 எனவும் மோதலுக்கு பின் இக்கூறுகள் V_1, V_2 எனவும் கொண்டால், நியூட்டன் சோதனை விதிப்படி,

$$\frac{V_2 - V_1}{U_2 - U_1} = -e$$

மோதலின் போது இயக்க ஆற்றல் இழப்பு.

m_1 நிறை கொண்ட பொருள் V_1 திசை வேகத்துடன் நகர்ந்து கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். மோதலுக்கு பின் இரு பொருட்களும், ஒன்றாக இணைந்து V என்ற திசை வேகத்துடன் நகர்வதாக கொள்வோம். மோதலினால் உந்த இழப்பு ஏற்படாமையால்,

$$(m_1 + m_2)V = m_1 V_1 \longrightarrow (1)$$

$$V = \frac{m_1}{m_1+m_2} \longrightarrow (2)$$

மோதலுக்கு முன் $K \cdot E = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \longrightarrow (3)$

மோதலுக்கு பின் $K \cdot E = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 \longrightarrow (4)$

$$= \frac{1}{2} m_1 \frac{m_1^2 V_1^2}{m_1+m_2} (m_1+m_2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \frac{\cdot m_1}{m_1+m_2}$$

$\frac{m_1}{m_1+m_2} \angle 1$ ஆதலால்,

மோதலுக்கு பின் K·E மோதலுக்கு முன் உள்ள K·E, $\frac{1}{2} m_1 V_1^2$ விடக் குறைவாகும். ஆகவே மோதலால் இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு ஏற்படுகிறது. மீட்சியுறு பொருட்கள்.

<u>மீட்சியுறு பொருட்களின் மோதல்.</u>

ஒரு திடப்பொருளின் மீது ஒரு விசை செயற்படும் போது அதன் உருவில் மாற்றம் ஏற்படுகிறது. செயற்படு விசையை நீக்கியவுடன், பொருளானது தன் பழைய நிலைக்குத் திரும்புகிறது. இப்பண்பு பெற்றுள்ள பொருட்களை மீட்சியல் பொருட்கள் என்பர். ஒரு கண்ணாடி பந்தை ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்திலிருந்துக் கொள்வோம். ஒரே உயரத்திலிருந்து விழுமாறு செய்வதாகக் கொள்வோம். ஒரே உயரத்திலிருந்து விழுமாறு செய்வதால், அவை தரையை தொடும் போது திசைவேகம் ஒன்றேயாகும். திடப்பொருட்களின் மீட்சியல் தன்மை காரணமாக, பொருள் மோதும் போது திசைவேகம் மாறுகிறது.

<u>நேர்மோதலும் சாய்வு மோதலும் :</u>

மோதலுக்கு முன், இரண்டு பொருட்களின் இயக்கத்தை தொடுபுள்ளியில் உள்ள நேர்குத்துக்கோட்டுத்

திசையில் இருப்பின், இம்மோதலை நேர்மோதல் என்பர்.

மோதலுக்கான விதிகள் :

1. நியூட்டன் சோதனை விதி :

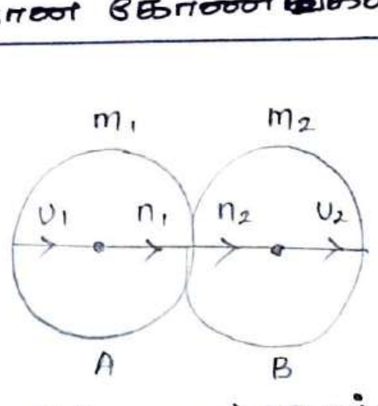
மீட்சியல் பொருட்களில் மோதல் பற்றி ஆராய்ந்து நியூட்டன் கீழ்கண்ட விதியை வரைந்தார்.

இரு பொருட்களுக்கிடையே நேர்மோதல் ஏற்படும் போது, மோதலுக்குப் பின் அவற்றின் ஒப்பு திசைவேகத்திற்கு உள்ள விகிதம் மாறிலியாகவும், எதிர்குறியுடையதாகவும் அமையும் என பொருட்களிடையே சாய்வு மோதல் ஏற்படும் போது மோதலுக்குப் பின் பொது நேர்க்குத்து திசையில் உள்ள ஒப்பு திசைவேகக் கூறுக்கும் மோதலுக்கு முன் அதே திசையில் உள்ள ஒப்புத்திசைவேக கூறுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் மாறிலியாகவும், எதிர்குறி உடையதாகவும் அமையும். இம்மாறிலி நிலைமீட்சி எண் என்பர்.

மோதுகின்ற இரு பொருட்களின் பொது நேர்குத்துத் திசையில் மோதலுக்கு முன் உள்ள திசைவேக கூறுகள் U_1, U_2 எனவும், மோதலுக்கு பின் இக்கூறுகள் V_1, V_2 எனவும் கொண்டால், நியூட்டன் சோதனை விதிப்படி,

$$\frac{V_2 - V_1}{U_2 - U_1} = -e$$

இரு வழுவழுப்பான கோளங்களின் நேர்மோதல்



n_1 திசைவேகத்தில் செல்கின்ற m_1 நிறைகொண்ட கோளம் A அளவு n_2 திசைவேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும் m_2 நிறை கொண்ட கோளம் B யுடன் நேராக மோதல் கொள்வதாகக் கொள்வோம்.

AB என்ற கோடு இரு கோளங்களின் மையத்தை இணைக்கும் கோடு, ஆகவே மோதலுக்கு பின் கோளங்கள் இரண்டும் AB திசையிலே நகர்கிறது. இவற்றின் திசைவேகங்கள் V_1, V_2 எனக் கொள்வோம்.

நியூட்டன் சோதனை விதிப்படி ;மோதலுக்குப் பின் பொது நேர்க்குத்துத் திசையில் இரு -கோளங்களின் இறுதி ஒப்புத் திசைவேகம், ஆரம்ப ஒப்பு திசைவேகத்தின் $-e$ மடங்காகும்.

$$\therefore V_2 - V_1 = -e\,(U_2 - U_1) \longrightarrow (1)$$

உந்த அழிவின்மை விதிப்படி,

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_3 U_1 + m_2 U_2 \longrightarrow (2)$$

சமன் (1) ஐ m_2 ஆல் பெருக்க.

$$m_2 V_1 - m_2 V_2 = -m_2 (U_2 - U_1) \longrightarrow (3)$$

(2) $-$ (3).

$$V_1 (m_1 + m_2) = m_2 U_2 (1+e) + U_1 (m_1 - e m_2)$$

$$V_1 = \frac{m_2 U_2 (1+e) + U_1 (m_1 - e m_2)}{m_1 + m_2} \longrightarrow (4)$$

சமன் (1) ஐ m_1 ஆல் பெருக்க,

$$m_1 V_2 - m_1 V_1 = m_1 e (U_2 - U_1) \longrightarrow (5)$$

(2) + (5)

$$V_2 (m_1 + m_2) = m_1 U_1 (1+e) + (U_2 (m_2 - e m_2)$$

$$V_2 = \frac{m_1 u_1 (1+e) + U_2 (m_2 - e m_1)}{m_1 + m_2} \longrightarrow (6)$$

சமன்பாடு (4), (6) மோதலுக்கு பின் கோளங்களின் திசைவேகங்களைத் தருகின்றன.

சிறப்பு நேர்வு :

1. இரு கோளங்களும் முற்றிலும் மீட்சி தன்மை கொண்டதாகவும் சம நிறை கொண்டதாகவும் இருந்தால்-

$e = 1, \quad m_1 = m_2$

$V_1 = U_2, \quad V_2 = U_1$

ஆகவே, இரு சம நிறை கொண்ட முற்றிலும் மீட்சித் தன்மை கொண்ட கோளங்கள் மோதும் போது மோதலுக்குப் பின் திசை வேகங்களாகவும் பரிமாறிக் கொள்கின்றன.

2. $e = 0$ எனில் $V_2 = V_1$

3. m_1 நிறை கொண்ட கோளம் A-ன் கணத்தாக்கு A-ன் உந்த மாற்றம் $m_1(V_1 - U_1)$

$$I = \frac{m_1(m_2U_2(1+e) + U_1(m_1 + em_2)}{m_1+m_2} - U_1$$

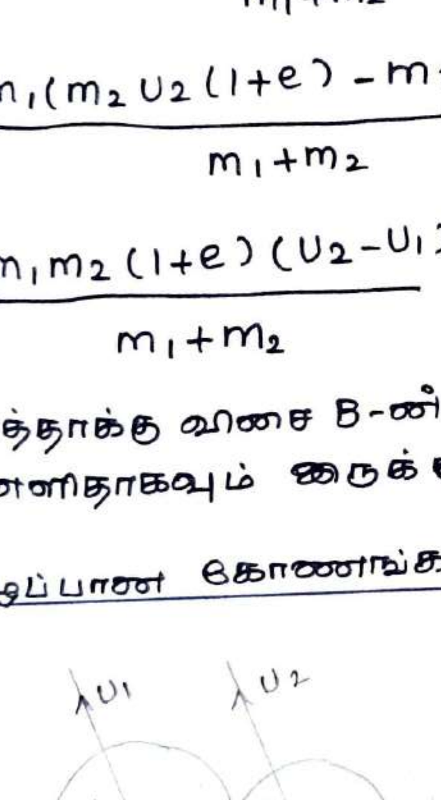
$$= \frac{m_1(m_2U_2(1+e) + U_1(m_1 - em_2) - m_1U_1 - m_2U_1}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_1(m_2U_2(1+e) - m_2U_1(1+e)}{m_1+m_2}$$

$$I = \frac{m_1m_2(1+e)(U_2-U_1)}{m_1+m_2}$$

அந்த கணத்தாக்கு திசை B-ன் கணத்தாக்கு திசைக்கு சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்கும்.

<u>இரு வழுவழுப்பான கோளங்களுக்கிடையே சாய்வு மோதல்.</u>



U_1 திசைவேகத்தில் செல்கின்ற m_1 நிறை கொண்ட கோளம், U திசைவேகத்தில் செல்லும் m_2 நிறை கொண்ட கோளத்துடன் சாய்வு மோதல் கொள்கிறது. மோதலுக்கு முன் இயக்க

திசைகள் இரு கோளங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் α_1, α_2 என்ற கோணங்களில் அமைகின்றன.

மோதலுக்கு பின் இக்கோளங்களின் திசைவேகம் v_1, v_2 எனவும் இவற்றின் இயக்க திசை மையங்களை இணைக்கும் கோட்டிற்கு நேர்க்குத்து திசையில் எந்த மாற்றமும் இருக்காது.

$$\therefore V_1 \sin\theta_1 = U_1 \sin\alpha_1 \longrightarrow (1)$$

$$V_2 \sin\theta_2 = U_2 \sin\alpha_2 \longrightarrow (2)$$

நியூட்டன் சோதனைப்படி,

$$V_2\cos\theta_2 - V_1\cos\theta_1 = -e(U_2\cos\alpha_1 - U_1\cos\alpha_1) \rightarrow (3)$$

உந்த அழிவின்மை தத்துவப்படி,

$$m_2V_2\cos\theta_2 + m_1V_1\cos\theta_1 = m_2U_2\cos\alpha_2 - m_1U_1\cos\alpha_1 \rightarrow (4)$$

~~(4) — (5~~ சமன் (3) $\times m_2$

$$m_2V_2\cos\theta_2 - m_2V_1\cos\theta = -m_2e(U_2\cos\alpha_2 - U_1\cos\alpha_1) \rightarrow (5)$$

(4) − (5)

$$V_1\cos\theta(m_1+m_2) = m_2U_2\cos\alpha_2 + m_1U_1\cos\alpha_1 + m_2e(U_2\cos\alpha_2 + U_1\cos\alpha_1)$$

$$V_1\cos\theta_1 = \frac{U_1\cos\alpha(m_1 - em_2) + m_2U_2\cos\alpha_2(1+e)}{m_1+m_2} \longrightarrow (6)$$

சமன் (3) $\times m_1$

$$m_2V_2\cos\theta_2 - m_1V_1\cos\theta = -m_1e(\alpha_2\cos\alpha_2 - U_1\cos\alpha_1) \rightarrow (7)$$

$$V_2\cos\theta_2(m_1+m_2) = U_2\cos\alpha_2(m_2 - em_1) + m_1U_1\cos\alpha_1(1+\theta)$$

$$V_2\cos\theta_2 = \frac{U_2\cos\alpha_2(m_2 - em_1) + m_1U_1\cos\alpha_1(1+e)}{m_1+m_2}$$

சமன்பாடு (1), (6) ஆகியவற்றின் இருமடி கண்டு, கூட்டி V_1 ஐ கணக்கிடலாம்.

$$v_1 = \sqrt{\frac{U_1\cos\alpha(m_1 - m_2) + m_2U_2\cos\alpha_2(1+e)^2 + U_1^2\sin^2\alpha}{M_1+m_2}} \quad \text{----}(9)$$

சமன் (1)ஐ (6) ஆல் வகுக்க,

$$\tan\theta = \frac{u_1 \sin\alpha_1}{\dfrac{(u_1 \cos\alpha_1 (m_1 - e m_2) + m_2 u_2 \cos\alpha_2 (1+e))}{m_1 + m_2}} \rightarrow (10)$$

சமன் (2), (8) ஆகியவற்றை இருமடி கண்டு கூட்டி V_2 ஐ கணக்கிடலாம்.

$$V_2 = \sqrt{\left(\frac{u_2 \cos\alpha_2 (m_2 - e m_1) + m_1 u_1 \cos\alpha_1 (1+e)}{m_1 + m_2}\right)^2 + u_2^2 \sin^2\alpha_2} \rightarrow (11)$$

சமன்பாடு (2) ஐ (8) ஆல் வகுக்க.

$$\tan\theta_2 = \frac{u_2 \sin\alpha_2}{\dfrac{(u_2 \cos\alpha_2 (m_2 - e m_1) + m_1 u_1 \cos\alpha_1 (1+e))}{m_1 + m_2}} \rightarrow (12)$$

சமன்பாடு (11), (12) ஆகியவற்றைக் கொண்டு இரண்டாவது கோளத்தின் திசைவேகத்தையும், அதன் இயக்க திசைவேகத்தையும் கணக்கிடலாம்.

சிறப்பு நேர்வு :

1. இரு கோளங்களும் முற்றிலும் மீட்சித் தன்மையும், சமநிறையும் கொண்டிருப்பின் $e = 1, m_1 = m_2$

$$v_1 \cos\theta_1 = \frac{m_1 u_2 \cos\alpha_2 (1+1)}{2 m_1}$$

$$v_1 \cos\theta_1 = u_2 \cos\alpha_2$$

இதே போன்று $V_2 \cos\theta_2 = u_1 \cos\alpha_1$

2. $u_2 = 0$ எனில் $V_2 \sin\theta_2 = u_1 \cos\alpha_1$. அதாவது $0 = 0$.
இப்போது இரண்டாவது கோளம் மையங்களை இணைக்கும் கோடு வழியாக நகரும்.

3. நேர் கோளத்தின் மீது செயல்படும் கணதாக்கு

$$I = \frac{m_1 m_2 (1+e)(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)}{(m_1 + m_2)}$$

இரண்டாவது கோளத்தின் கணநாக்கு அதற்கு சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்கும்.

1. நேரடி மோதல் :

m_1, m_2 நிறைகள் கொண்ட இரு கோளங்களுக்கிடையே நேரடி மோதல் நடைபெறுவதாக கொள்வோம். மோதலுக்கு முன் இவற்றின் திசைவேகங்கள் முறையே u_1, u_2 எனவும் மோதலுக்கு பின் v_1, v_2 எனவும் கொள்வோம்.

நியூட்டன் சோதனை விதிப்படி,

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$$

உந்த அழிவின்மை விதிப்படி,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

மோதலுக்கு முன் மொத்த இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

மோதலுக்கு பின் மொத்த இயக்க ஆற்றல்.

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

மோதலால் ஏற்பட்ட இயக்க ஆற்றல் மாற்றம்

$$= \text{ஆரம்ப } K.E - \text{இறுதி } K.E$$

$$= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2} m (u_2^2 - v_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)(u_1 + v_1) + \frac{1}{2} m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2)$$

சமன்பாடு (2) லிருந்து,

$$m_2 (u_2 - v_2) = m_1 (v_1 - u_1)$$

சமன்பாடு (4) ஐ (3) ல் பதிலீடு செய்ய ஆற்றல் மாற்றம்

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)(u_1 + v_2) + \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)(u_2 + v_2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)(u_1 + v_1) - (u_2 - v_2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1) [(u_1 - u_2) - (v_2 - v_1)]$$

ஆனால் $v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1)$

ஆற்றல் மாற்றம்

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1) [(u_1 - u_2) + e(u_2 - u_1)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1 - v_1)(u_1 - u_2) + (1-e)$$

சமன் (1), (2)-லிருந்து

$$v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + e m_2 (u_2 - u_1)}{m_1 + m_2} \longrightarrow (6)$$

சமன் (6) ஐ (5) இல் பதிலீடு செய்ய ஆற்றல் மாற்றம்

$$= \frac{1}{2} m_1 \left[u_1 - \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + e m_2 (u_2 - u_1)}{m_1 + m_2} \right] (u_2 - u_1)(1-e)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{[m_2 (u_1 - u_2)(1+e)]}{m_1 + m_2} \right) (u_1 - u_2)(1-e)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2 (1-e^2)$$

e-ன் மதிப்பு எப்போதும் 1 ஐ விட குறைவாக இருக்கும்.

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2$$

சாய்வு மோதல்:

m_1, m_2 நிறை கொண்ட இரு கோளங்கள் u_1, u_2 என்ற திசைவேகங்களுடன் நகர்கின்றன. இயவற்றின் இயக்க திசைகள் இவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் α_1, α_2 எனும் கோணங்களை உருவாக்குகின்றன.

மோதல் காரணமாக, மையங்களை இணைக்கும் கோட்டிற்கு நேர்குத்து திசையில் உள்ள திசைவேகங்கள் மாறுவதில்லை. ஆகவே இயக்க ஆற்றல் இழப்பு, மையங்களை திசைவேக மாற்றத்தாலேயே ஏற்படுகிறது. ஆகவே சாய்வு மோதலுக்கு நேரடி மோதல் போன்றே கணக்கிடலாம். நேரடி மோதலின் போதுள்ள u_1, u_2 ஆகியவற்றிற்கு பதிலாக $u_1 \cos \alpha_1$, $u_2 \cos \alpha_2$ கொண்டு ஆற்றல் இழப்பு கணக்கிடலாம்.

∴ ஆற்றல் இழப்பு

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (1-e^2)(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2)$$

Unit – II: Statics, Hydrostatics and Hydrodynamics

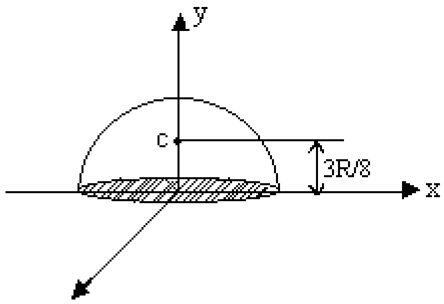
Centre of gravity of body- centre of gravity of a solid hemisphere and solid cone – atmospheric pressure – variation of atmospheric pressure with altitude – height of homogeneous atmosphere- centre of pressure- determination of centre of pressure- centre of pressure with rectangular lamina- Metacenter- metacentric height- determination of metacentric height of ship.

Total energy possessed by liquid in motion- Bernoulli,s theorem- Applications of Bernoulli,s theorem of liquids, 1. Toricelli's theorem, 2. Venturimeter

Centre of gravity of body

A point through which the line of action of the weight of the body always passes in whatsoever manner the body is placed.

Centre of gravity of body of a solid hemisphere



We can cut hemisphere horizontally into circular slices of thickness dh, each slice at height h above the base

Each slice at height h has radius

r=sqrt(R*R-h*h)

area of slice= pi*r*r=pi*(R*R-h*h)

centre of mass at h. So,

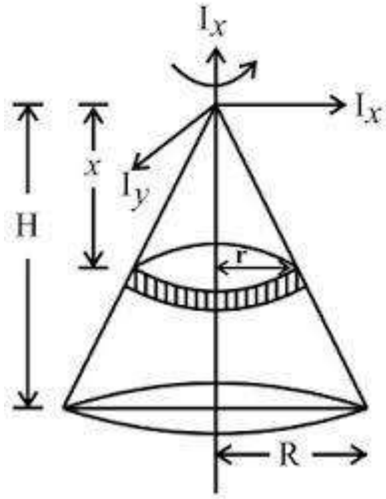
CG of hemisphere=(1/volume of h.sphere)*(integral h*pi*(R*R-h*h)*dh) h from 0 to R

=(1/(2/3*pi*R*R*R))*pi*(R^4/2-R^4/4)

=R/4*3/2=3R/8

Centroid of hemisphere radius R is at 3R/8.

Centre of gravity of body of a solid cone



We can cut cone vertically into circular slices of thickness dx, each slice at height x above the base

Each slice at height h has radius r=sqrt(R*R-h*h)

area of slice= pi*r*r=pi*(R*R-h*h)

centre of mass at h. So,

CG of hemisphere=(1/volume of h.sphere)*(integral h*pi*(R*R-h*h)*dh) h from 0 to R

=(1/(2/3*pi*R*R*R))*pi*(R^4/2-R^4/4)

=R/4*3/2=3h/4

Centroid of hemisphere radius R is at 3h/4.

Atmospheric pressure

Atmospheric pressure also known as barometric pressure (after the barometer), is the pressure within the atmosphere of Earth. The standard atmosphere (symbol: atm) is a unit of pressure defined as 101,325 Pa (1,013.25 hPa; 1,013.25 mbar), which is equivalent to 760 mm Hg, 29.9212 inches Hg, or 14.696 psi.[1] The atm unit is roughly equivalent to the mean sea-level atmospheric pressure on Earth, that is, the Earth's atmospheric pressure at sea level is approximately 1 atm.

In most circumstances, atmospheric pressure is closely approximated by the hydrostatic pressure caused by the weight of air above the measurement point. As elevation increases, there is less overlying atmospheric mass, so that atmospheric pressure decreases with increasing elevation. Pressure measures force per unit area, with SI units of Pascals (1 pascal = 1 newton per square metre, 1 N/m^2). On average, a column of air

with a cross-sectional area of 1 square centimetre (cm^2), measured from mean (average) sea level to the top of Earth's atmosphere, has a mass of about 1.03 kilogram and exerts a force or "weight" of about 10.1 newtons, resulting in a pressure of 10.1 N/cm^2 or 101 kN/m^2 (101 kilopascals, kPa). A column of air with a cross-sectional area of 1 in^2 would have a weight of about 14.7 lb_f, resulting in a pressure of 14.7 lb_f/in^2.

Height Of homogeneous atmospheric pressure

Atmospheric pressure is expressed in several different systems of units: millimetres (or inches) of mercury, pounds per square inch (psi), dynes per square centimetre, millibars (mb), standard atmospheres, or kilopascals. Standard sea-level pressure, by definition, equals 760 mm (29.92 inches) of mercury, 14.70 pounds per square inch, 1,013.25 × 10^3 dynes per square centimetre, 1,013.25 millibars, one standard atmosphere, or 101.325 kilopascals. Variations about these values are quite small; for example, the highest and lowest sea-level pressures ever recorded are 32.01 inches (in the middle of Siberia) and 25.90 inches (in a typhoon in the South Pacific). The small variations in pressure that do exist largely determine the wind and storm patterns of Earth.

Atmospheric pressure with altitude

Although you can't derive atmospheric pressure at sea level from the total height of the atmosphere, you can calculate changes in air pressure from one height to another. This fact, along with other considerations, including the ideal gas law, lead to an exponential relationship between the sea level pressure (P0) and pressure at height h (Ph). This relationship, known as the barometric formula, is:

$$Ph=Poe^{mgh/kT}$$

m = mass of one air molecule

g = acceleration due to gravity

k = Boltzmann's constant (ideal gas constant divided by Avogadro's number)

T = temperature

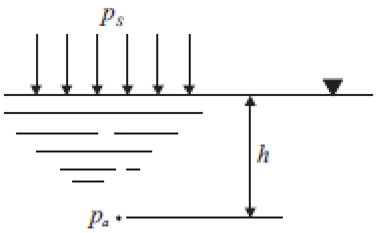
centre of pressure

The centre of pressure is the point where the total sum of a pressure field acts on a body, causing a force to act through that point. The total force vector acting at the center of pressure is the value of the integrated vectorial pressure field.

Determination of centre of presure

Centre of pressure may be defined as 'the point in a plane at which the total fluid thrust can be said to be acting normal to that plane'**.**

As shown in figure the hydrostatic pressure exerted by a liquid of density ρ or specific weight w, at depth h below the surface, is: $p=\rho gh=wh$



This is the gauge pressure, due solely to the liquid column of height h. To obtain the absolute pressure pa at depth h, we must add whatever pressure ps is applied at the liquid's surface, giving: $p_a=p_s+p=p_s+wh$

Referring to figure (3), consider an element at start depth y, width dy, then force on element is given by:$=w(ycos(\theta)-h)Bdy$

The summation of moments about the pivot point 0 is given by:

$\Sigma M_0=0$

$WR_3-wB\int(y_2\cos(\theta)-hy)dy=0$

$M=WR_3=w\int(y_2\cos(\theta)-hy)dy$

Metacentricheight

The metacentric height (GM) is a measurement of the initial static stability of a floating body. It is calculated as the distance between the centre of gravity of a ship and its metacentre. A larger metacentric height implies greater initial stability against overturning. The metacentric height also influences the natural period of rolling of a hull, with very large metacentric heights being associated with shorter periods of roll which are uncomfortable for passengers. Hence, a sufficiently, but not excessively, high metacentric height is considered ideal for passenger ships.

Metacentric height of the ship

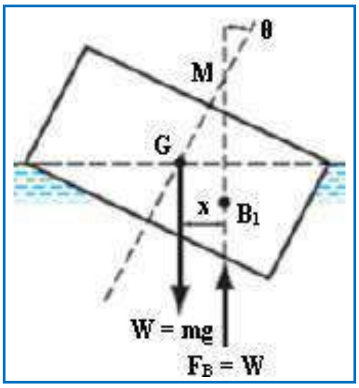
Consider a ship or pontoon floating as shown in figure. The center of gravity of the body is at G and the center of buoyancy is at B. For equilibrium, the weight of the

floating body is equal to the weight of the liquid it displaces and the center of gravity of the body and the centroid of the displaced liquid are in the same vertical line. The centroid of the displaced liquid is called the "center of buoyancy". Let the body now be heeled through an angle θ, B_1 will be the position of the center of buoyancy after heeling. A vertical line through B_1 will intersect the center line of the body M at and this point is known as the metacenter of the body when an angle θ is diminishingly small. The distance GM is known as the metacentric height. The force due to buoyancy acts vertically up through B_1 and is equal to W. The weight of the body acts downwards through G.

Stability of floating objects:

- Metacenter point M: the point about which the body starts oscillating.
- Metacentric height GM : is the distance between the center of gravity of floating body and the metacenter.
- If M lies above G a righting moment is produced, equilibrium is stable and GM is regarded as positive.
- If M lies below G an overturning moment is produced, equilibrium is unstable and GM is regarded as negative.

Determination of Metacentric height

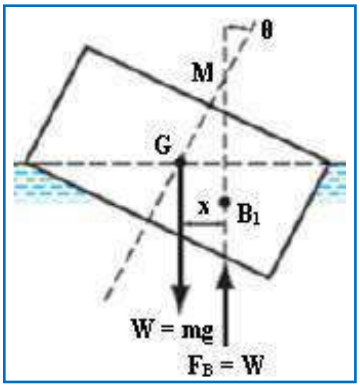


$$\boldsymbol{WGMsin(\theta) = x}$$

GM = $\frac{\boldsymbol{Px}}{\boldsymbol{Wsin\ (\theta)}}$

Where x = distance from pontoon centerline to added weight.

Where W= weight of the vessel including P .



$$\boldsymbol{GM = BM + OB - OG}$$

BM = $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{V}}$

OB =0.5 $\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{L \times D}}$

$I = \frac{DL3}{12}$

Where V= volume of displaced liquid

Show the variation of depth of submergence and position of metacentric height under different loading conditions

Discuss what will happen if the ballast weights were added at the center of gravity so that the resultant center of gravity was unchanged.

Bernoulli's Theorem:

Definition: Bernoulli’s theorem states that the whole mechanical energy of the flowing liquid includes the gravitational potential energy of altitude, then the energy-related with the liquid force & the kinetic energy of the liquid movement, remains stable. From the energy conservation principle, this theorem can be derived.

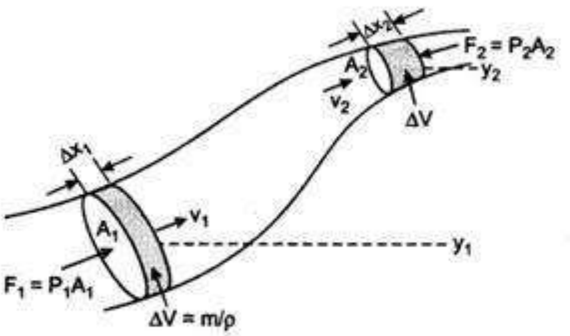


Fig. 11.11 : The flow ideal liquid in the tube of non uniform area of cross section.

According to Bernoulli's theorem, the sum of the energies possessed by a flowing ideal liquid at a point is constant provided that the liquid is incompressible and non-viseous and flow in streamline.

Potential energy + Kinetic energy + Pressure energy = Constant

P+1/2pv2+pgh=Constant

gh+1/2v2+pP=C

Where C is a constant.

This relation is called Bernoulli's theorem.

Dividing above eqn., by g, we get

h+pgP+1/2gv2=C′

Where C is another constant.

For horizontal flow, h remains same throughout.

So,

$$pgP+2gv2=\text{Constant (or) } P+1/2pv2=\text{Constant}$$

P is static pressure of the liquid and 1/2pv2 is its dynamic and velocity pressure.

Thus, for horizontal motion, the sum of static and dynamic pressure is constant. If p1v1 and p2v2 represent pressure and velocities at two points.

Then

$P1+1/21pv12=P2+1/2pv22$

Concepts :

- In Bernoulli's theorem $P+pgh+1/2ev2=$ constant.
- The term $(p+pgh)$ is called static pressure and the term $21pv2$ is the dynamic pressure of the fluid.
- Bernoulli theorem is fundamental principle of the energy.
- The equation $pgP+21gv2+h=constant$
- the term pgP = pressure head
- the term $2gv2$ = velocity head
- h = gravitational head.

Derivation of Bernoulli's Theorem :

The energies possessed by a flowing liquid are mutually convertible. When one type of energy increases, the other type of energy decreases and vice-versa. Now, we will derive the Bernoulli's theorem using the work-energy theorem.

Consider the flow of liquid. Let at any time, the liquid lies between two areas of flowing liquid A1 and A2. In time interval Δt, the liquid displaces from A1 by $\Delta x1=v1\Delta t$ and displaces from A2 by $\Delta x2=v2\Delta t$. Here v1 and v2 are the velocities of the liquid at A1 and A2.

The work done on the liquid is $P1A1\Delta x1$ by the force and $P2A2\Delta x2$ against the force respectively.

Net work done,

$$W=P1A1\Delta x1-P2A2\Delta x2$$

$$\Rightarrow W=P1A1v1\Delta t-P2A2v2\Delta t$$

$$=(P1-P2)\Delta V$$

Here, $\Delta V\rightarrow$ the volume of liquid that flows through a cross-section is same (from equation of continuity).

But, the work done is equal to net change in energy (K.E. + P.E.) of the liquid, and

$$\Delta K=21p\Delta V(v12-v22)$$

$$\text{and } \Delta U=p\Delta V(h2-h1)$$

$$\therefore(P1-P2)\Delta V=21p\Delta V(v12-v22)+pg\Delta V(h2-h1)$$

$$P1+21v12+pgh1=P2+21v22+pgh2$$

$$\text{or } P+21pv2+pgh=\text{constant}$$

This is the required relation for Bernoulli's theorem.

$$\therefore A1v1=A2v2$$

So, more the cross-sectional area, lesser is the velocity and vice-versa.

So, Bernoulli's theorem,

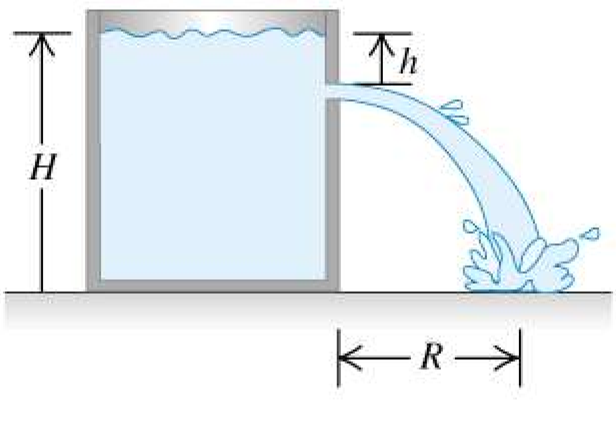
$$P1+1/2p1v12=P2+1/2p2v22$$

Torricelli’s Theorem

Torricelli had interests in various aspects of physics and mathematics and torricelli’s theorem was one of his biggest achievements. The law explains the relation between fluid leaving a hole and the liquid’s height in that container.

The relationship can be summarized in the following manner. If you have a container filled with fluid with small holes at the bottom of the container, the fluid leaves through the hole with velocity same as it would experience if dropped from the same height to the hole level. If the liquid is dropped from a height h, it would have a velocity v and this v is the same velocity at which the liquid leaves the hole when the height of fluid h is same as liquid dropped in the container.

We also assume that it is an ideal fluid which means that the liquid is in compressible, non-viscous and laminar flow. These factors cannot be neglected since same rules cannot be applied to non-fluids as their viscosity and flow may not be same across the liquid itself.



Torricelli’s Law Derivation

Assuming that the fluid is in compressible, Bernoulli's principle states that:

$v^2/2 + gh\ p/\rho$ = constant

Where,

v is speed of liquid,

g denotes gravitational acceleration,

h shows liquid's height over reference point,

ρ is density.

P is equal to atmospheric pressure at the top of the container.

v is considered as 0 because the liquid surface drops in height slowly compared to the speed at which liquid leaves the tank.

h is 0 and p is atmospheric pressure at opening h = 0.

$gh+p_{atm}/\rho=v^2/2+p_{atm}/\rho$

$v^2 = 2gh$

$V = \sqrt{2gh}$

A simple experiment to test Torricelli's law can also be performed by a soda bottle by puncturing the bottom with a small hole. As the height in the reservoir decreases, the exit velocity decreases.

Venturimeter

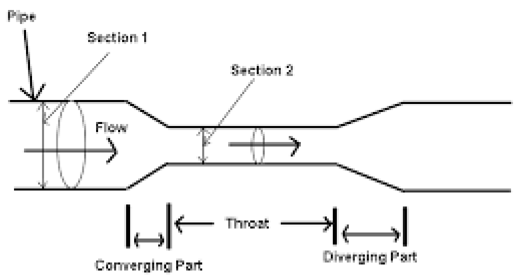
Venturimeter is a device that is used to measure the rate of flow of fluid through a pipe. This device is based on the principle of Bernoulli's Equation. Venturimeter is named after G.B Venturi who developed the principle of venturimeter in 1797 but this principle comes into consideration with the help of C. Herschel who developed the first venturimeterin 1887.

Main parts of venturimeter :-

1. Covering part : It is the part of the venturimeter where the fluid converges .

2. Throat : It is the portion that lies in between the converging and diverging part of venturi. In the throat portion the cross section is much less than converging and diverging portion. When the reaches the throat, its velocity increases and pressure decreases.

3. Diverging part : It is the part of the venturimeter where the fluid gets diverges and the cross-section area increases.



Venturimeter

புவி ஈர்ப்பு மையம் :

ஒரு திண்மபொருள் எண்ணிலடங்காத் துகள்களாகல் ஆனதாக கொள்ளலாம். புவியின் ஈர்ப்பு காரணமாக பொருளில் உள்ள ஒவ்வொரு துகள்களையும் புவி தன்னை நோக்கி ஈர்க்கிறது. இவ்விசை அத்துகள்களின் நிறைக்கு நேர் விகிதத்தில் அமையும். இவ்விசையை துகளின் எடை என்பர். புவியை நோக்க பொருள் சிறிதாக இருப்பதால், புவியின் மையத்தை துகள்களுடன் இணைக்கும் கோடுகள் ஏறத்தாழ இணையாக இருக்கும். ஆகவே துகள்களில் கீழ் நோக்கி செயல்படும் விசைகள், இணை விசை தொகுப்பாக அமைகிறது. ஒரு போக்கு இணை விசைகளின் தொகுபயன், பொருளின் எடை என்பர். இது ஒவ்வொரு துகள்களின் எடைகளின் கூடுதலுக்கு சமமாகும். இது பொருளின் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியாக செயல்படும். இப்புள்ளியை அப்பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையம் என்பர்.

பொருளின் நிலை எதுவாயினும், பொருளின் எடை எந்தப் புள்ளி வழியாகச் செயல்படுகிறதோ, அப்புள்ளி புவி ஈர்ப்பு மையம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

புவி ஈர்ப்பு மையத்திற்கும், பொருண்மை மையத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடு.

ஒரு பொருளில் புவி ஈர்ப்பு மையம் இருக்க வேண்டுமானால், பொருள் கீழ்கண்ட நிபந்தனைகள் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

1. பொருள் எடை பெற்றிருக்கும் போது, அதாவது பொருளின் மீது ஈர்ப்பு விசை செயல்பட வேண்டும்.

2. பொருளில் உள்ள துகள்களில் செயல்படும் எடை இணை விசை தொகுப்பாக அமைய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பொருளை புவிக்கு மேல் எடுத்துச் செல்வதாகக் கொள்வோம். இங்கு புவியின் ஈர்ப்பு விசை செயல்படுவதில்லை என கொள்வோம். இந்நிலையில் பொருளுக்கு எடை கிடையாது. ஆகவே இதற்கு புவி ஈர்ப்பு மையம் இருக்காது. ஆனால் பொருள் எப்போதும் நிறை கொண்டிருக்கும். அது புவியின் ஈர்ப்பு விசையைச் சார்ந்திருப்பதில்லை. ஆகவே பொருளுக்கு பொருண்மை மையம் எப்போதும், இருக்கும்.

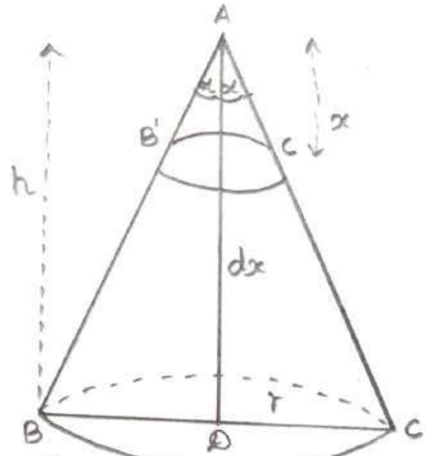
பொருளின் பரிமாணம் மிகப் பெரிது என கொள்வோம். ஆகவே இவற்றில் உள்ள புள்ளிகளையும் புவியின் மையத்தையும்

இணைக்கும் கோடுகள் ஒரே கோடாக இருக்காது. ஆகவே ஒரு இணைவிசை தொகுப்பு இருக்காது. ஆகவே அப்பொருளுக்கு புவி ஈர்ப்பு மையம் இருக்காது. ஆனால் அதற்கு பொருண்மை மையம் இருக்கும். ஏனென்றால், இது பொருளின் பல பகுதிகளில் செயற்படும் கற்பனை இணை விசைகளின் மையமாகும்.

ஒரு பொருளுக்கு புவி ஈர்ப்பு மையம் இருந்தால் அது பொருண்மை மையத்திலேயே அமையும். இவ்வாறு புவி ஈர்ப்பு மையம் கொண்ட பொருளுக்கு பொருண்மை மையம் இருக்கும். ஆனால் பொருண்மை மையம் கொண்டுள்ள பொருளுக்கு புவி ஈர்ப்பு மையம் இருக்கலாம். அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

<u>திடப்பொருள் நேர் கூம்பின் புவிஈர்ப்பு மையம்</u> :

பட்டக் கூம்பின் அடிப்பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை மிக அதிகமாக்க இது ஒரு ஒழுங்கான கூம்பாகிறது. கூம்பின் உயரம் h எனக் கொண்டால் இதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் உச்சியிலிருந்து (3/4 h) ஆழத்தில் அமையும். கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.



A,B,C என்பது கெட்டியான கூம்பின் குறுக்கு வெட்டு பகுதி எனக் கொள்வோம். இதன் உயரம் h எனவும், அடித்தளத்தின் ஆரம் 'r' எனவும் கொள்வோம். அடிப்பகுதியின் மையம் D எனக் கொள்வோம். AD = h. கூம்பின் குத்துயரமாகும். உச்சியிலிருந்து 'x' தொலைவில் dx தடிமன் கொண்ட தகடு B'C' ஐ கருதுவோம்.

இது கூம்பின் அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகும். கூம்பின் உச்சிக் கோணம் 2α எனக் கொள்வோம். கணக்கில் எடுத்து கொண்ட தகட்டின் ஆரம் y எனக் கொண்டால்,

$$y = x \tan\alpha$$

தகட்டின் பருமன் = பரப்பளவு × தடிமன்

$$= \pi x^2 \tan^2\alpha \, dx$$

ஓரலகு பருமன் எடை ρ எனக் கொண்டால் கணக்கில் கொண்ட தகட்டின் எடை $= \pi x^2 \tan^2\alpha \cdot dx \cdot \rho$

A ஐப் பற்றிய தட்டின் திருப்புதிறன்

$= \pi\rho x^2 \tan^2\alpha\, dx . x$

இதே போன்று கூம்பினைப் பல தட்டுகளாகப் பாகுத்து, ஒவ்வொரு தட்டுகளின் திருப்புதிறன் கணக்கிடலாம். கூம்பில் உள்ள எல்லாத் தட்டுகளின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

$= \int_0^h \pi\rho \tan^2\alpha\, x^3\, dx$

$= \frac{1}{4}\pi\rho \tan^2\alpha\, h^4$

கூம்பின் பருமன் $= \int_0^h \pi \tan^2\alpha\, x^2\, dx$

$= \frac{1}{3}\pi \tan^2\alpha\, h^3$

கூம்பின் எடை $= \frac{1}{3}\pi \tan^2\alpha\, h^3 \rho$

கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் உச்சியிலிருந்து $\bar{x}$ தொலைவில் இருப்பதாக கொள்வோம்.

கூம்பின் மொத்த எடையின் திருப்புதிறன் :

$= \frac{1}{3}\pi\rho \tan^2\alpha\, h^2 \bar{x}$

ஆகவே,

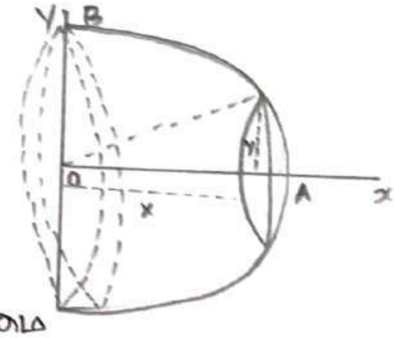
$\frac{1}{3}\pi\rho \tan^2\alpha\, h^3 \bar{x} \frac{1}{4} = -\pi\rho \tan^2\alpha\, h^4$

$\bar{x} = \frac{3}{4}h$

ஆகவே கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் AB என்ற கோட்டை 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் பாகிக்கும் G என்ற புள்ளியில் அமையும்.

திடப்பொருள் அரைக் கோளத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையம்

ஆரம் 'a' கொண்ட வட்டத்தின் கால் வட்டவில் AB என கொள்வோம். O ஐ ஆயமாகவும் OA, OB ஆகியவற்றை அச்சுகளும் கொண்டால் AB வளைகோட்டிற்கான சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$



AOB என்ற பரப்பினை OA என்ற அச்சை மையமாகக் கொண்டு சுற்றும்போது, அரைக் கோளத்தின் பருமன் தோன்றுகிறது. சமச்சீர் தன்மை காரணமாக இதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் OA ல் அமையும். ஆகவே

$\bar{y} = 0$

0 விலிருந்து x தொலைவில் dx தடிமன் கொண்ட வட்டப் பகுதியை கருதுவோம். இதன் ஆரம் y எனக் கொள்வோம்.

கணக்கில் கொண்ட வட்ட பகுதியின் பருமன் $= \pi y^2 dx$

ஒருலகு பருமனின் நிறை ρ எனக் கொண்டால்.

வட்டத்தகட்டு பகுதியின் எடை $= \pi y^2 dx . \rho$

$\pi y^2 \rho dx$ நிறை கொண்ட வட்ட தகட்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அதன் மையம் $(x, 0)$ ல் அமையும்.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x=0}^{a} \pi y^2 \rho dx . x}{\sum_{x=0}^{a} \pi y^2 \rho dx}$$

$$= \frac{\int_0^a y^2 x dx}{\int_0^a y^2 dx}$$

ஆனால், $y^2 = (a^2 - x^2)$

$$x = \frac{\int_0^a (a^2 - x^2) x dx}{\int_0^a (a^2 - x^2) dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{2} a^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4\right]_0^a}{\left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right]_0^a}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} a^4 - \frac{1}{4} a^4}{a^3 - \frac{1}{3} a^3} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{2}{3} a^3}$$

$$= \frac{3}{8} a$$

ஆகவே ஆரம் 'a' கொண்ட அரை கோளத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையமானது, அதன் அச்சில் மையத்திலிருந்து 3/8 a தொலைவில் அமையும்.

அழுத்த மையம்

அமைதி நிலையில் உள்ள பாய்பொருள்கள் பற்றி படிப்பது நிலையாய் பொருளியல் எனப்படும். திரவம், வாயு ஆகியவை பாய்பொருள்களாகும்.

நேர்குத்து விசையும், தொடுவியல் விசையும்.

நேர்குத்து விசை என்பது ஒரு பொருளின் பரப்பிற்கு செங்குத்துத் திசையில் செயல்படும் விசையாகும். இவ்விசையானது பொருளை சுருக்குமாயின், இதனை அழுக்கம் என்பர். இவ்விசையானது பொருளை விரிவாக்க முயன்றால் இழுவிசை என்பர். விசையானது தளத்திற்கு இணையாக செயல்பட்டால் இவ்விசையை தொடுவியல் விசை அல்லது சறுக்கு விசை என்பர்.

அழுத்தம் :

நிலையான திரவத்தின் ஓரலகுப் பரப்பில், அப்பரப்பிற்கு செங்குத்து திசையில் செயல்படும் அழுக்கத்தை அழுத்தம் என்பர்.

ஒரு புள்ளியை சுற்றிய பரப்பளவு A எனவும், அப்பரப்பிற்கு செங்குத்தாக செயல்படும் விசை F எனவும் கொண்டால்.

$$\text{அழுத்தம்} = \frac{\text{விசை}}{\text{பரப்பளவு}} = \frac{F}{A}$$

ஒரு பரப்பில் செயல்படும் அழுக்கம் சீராக இல்லையெனில், வெவ்வேறு புள்ளிகளில் செயல்படும் அழுத்தம் வேறுபடும். அப்போது ஒரு புள்ளியில் உள்ள அழுத்தமானது அப்புள்ளிக்கு சுற்றிய சிறிய பரப்பில் செயல்படும் விசைக்கும், அப்பரப்பளவிற்கும் உள்ள விகிதமாகும்.

$$\text{அழுத்தம்} = \frac{dF}{dA}$$

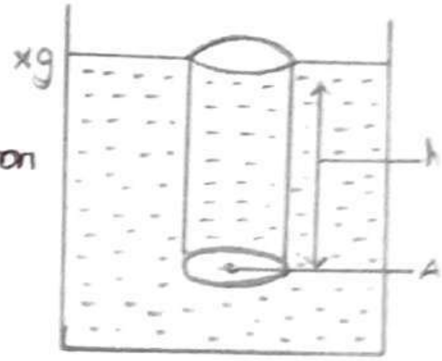
அலகு : நியூட்டன் / மீட்டர் ^{2} அல்லது கிலோகிராம் எடை / மீட்டர் ^{2}

நிலையான திரவ பரப்பின் கீழ்த்தளத்திற்கு h ஆழத்தில் உள்ள புள்ளியில் அழுத்தம்.

அடர்த்தி ρ கொண்ட ஒரு படித்தான திரவம் உள்ள பாத்திரத்தை கருதுவோம். மேற்பரப்பிலிருந்து h ஆழத்தில் உள்ள

ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம் கணக்கிட வேண்டும்.

A ஐச் சுற்றி ஒரு சிறிய கிடைத்தள பரப்பைக் கருதுவோம். இதன் பரப்பளவு 'a' எனக் கொள்வோம். இதன்மீது செயல்படும் அழுத்தமானது, அப்பரப்பின் மேல் செங்குத்தாக அமைந்த உருளை திரவத்தம்பத்தின் எடையாகும்.



திரவ தம்பத்தின் எடை = பருமன் x அடர்த்தி

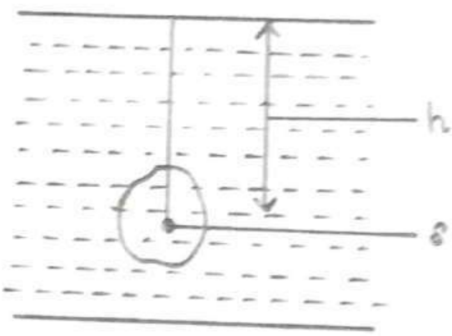
$$= \frac{a.h.\rho.g}{a}$$

$$= ah\rho g$$

A ல் செயல்படும் அழுத்தம் $= h\rho g$ சார்பிலா அலகு.

ஒரு தளப்பரப்பில் செயல்படும் அழுக்கம்:

அடர்த்தி ρ கொண்ட ஒரு படித்தான திரவத்தினுள் மூழ்கி வைக்கப்பட்டுள்ள S பரப்பளவு கொண்ட தளப்பரப்பைக் கருதுவோம்.



அப்பரப்பை பல சிறு பகுதியாக பிரித்து dS பரப்பளவு கொண்ட பரப்பை கருதுவோம். இது திரவ மேற்பரப்பிலிருந்து h ஆழத்தில் இருப்பதாக கொள்வோம்.

இதன் மீது செயல்படும் அழுக்கம் = அழுத்தம் x பரப்பளவு

$$= h\rho g \, dS.$$

இப்பரப்பளவு முழுவதும் செயல்படும் தொகுபயன் அழுக்கம் = பல பகுதிகளில் செயல்படும் அழுக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

$$= \int h\rho g \, dS.$$

திருப்பு திறன்களின் தேற்றத்திலிருந்து.

$h_1 dS_1 + h_2 dS_2 + \dots = \bar{h} \times S$ என்பது நமக்கு தெரியும். இங்கு $\bar{h}$ என்பது புவி ஈர்ப்பு மையம் உள்ள ஆழம். S என்பது மொத்த பரப்பளவு

தொகுபயன் அழுக்கம் $= \bar{h} \rho g . S$

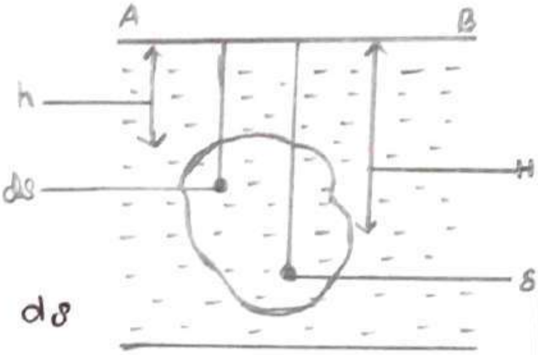
= புவி ஈர்ப்பு மையத்தில் உள்ள அழுத்தம் x மொத்த பரப்பளவு

அழுத்த மையம்:

நிலையான திரவம் ஒன்றினுள் ஒரு தளம் மூழ்கியிருக்கும்

போது மீது அதன் மீது செயற்படும் தொகுபயன் அழுக்கம் $h\delta$ என்பது நமக்கு தெரியும். தளத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிகளிலும் செயற்படும், திரவ அழுக்கமானது அப்புள்ளி அமைந்துள்ள ஆழத்தை சார்ந்திருக்கும். இவ் அழுக்கமானது தளத்திற்கு நேர்குத்து திசையில் செயற்படும். இவை எல்லாம் இணைந்து இணை விசை தொகுப்பாக அமையும். இவற்றின் தொகுபயன் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியாகச் செயற்படும். இப்புள்ளியை கொடுக்கப்பட்ட பரப்பின் அழுத்த மையம் என்பர்.

அழுத்த மையம் காணல் - பொது வகை



பரப்பளவு δ கொண்ட ஒரு தளபரப்பு அடர்த்தி ρ கொண்ட திரவத்தினுள் செங்குத்தாக அமிழ்ந்திருப்பதாக கொள்வோம். பரப்பினை பல சிறு பகுதிகளாக பிரிப்பதாக கொள்வோம். இவ்வாறு பிரிக்கப்பட்ட பகுதியில் $d\delta$ பரப்பளவு கொண்ட சிறு பகுதியை கருதுவோம். இப்பரப்பு திரவத்தின் மேற்பரப்பிலிருந்து h ஆழத்தில் உள்ளது.

இப்பகுதியின் மீது செயற்படும் அழுக்கம் $= h\rho g\, d\delta$.

AB என்ற பரப்பை பற்றிய, இவ்வழுக்கத்தின் திருப்புத்திறன் $= h\rho g d\delta . h$
$= h^2 \rho g d\delta$.

இதை போன்று ஒவ்வொரு பகுதியினுடைய அழுக்கத்தின் திருப்புதிறன் காணலாம்.

திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$= \sum h^2 \rho g d\delta$ (or) $\int h^2 \rho g d\delta$.

தளப்பரப்பின் அழுத்த மையம் P என்ற புள்ளியில் இருப்பதாக கொள்வோம். இது திரவத்தின் மேற்பரப்பு AB யிலிருந்து H ஆழத்தில் இருப்பதாக கொள்வோம்.

தொகுபயன் அழுக்கம் $= \int h \rho g d\delta$

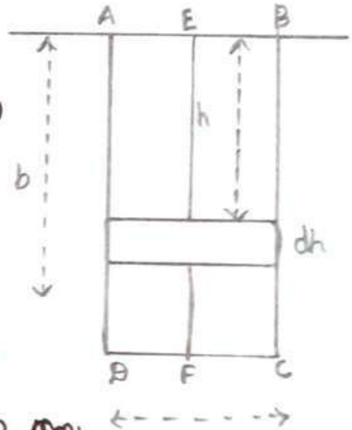
AB பரப்பை பற்றிய, இத்தொகுபயன் அழுக்கத்தின் திருப்பு திறன் $H \int h \rho g d\delta$.

$$H \int h \rho g \, dS = \int h^2 \rho g \, dS$$

$$H = \frac{\int h^2 dS}{\int h \, dS}$$

இதிலிருந்து அழுத்த மையம் கணக்கிடலாம். தளப்பரப்பின் நிலை மாற்றாலும் அழுத்த மையத்தின் நிலை மாறுவதில்லை. ஆகவே இம்முடிவானது சாய்ந்த நிலையில் உள்ள தளங்களுக்கும் பொருந்தும்.

அமைதியான நிலையில் உள்ள ஒரு படித்தான திரவ மட்டத்தில் ஒரு பக்கம் இருக்குமாறு அமிழ்ந்திருக்கும் செவ்வகத் தகட்டின் அழுத்த மையம்.



ABCD என்ற செவ்வக தகடானது, அடர்த்தி ρ கொண்ட திரவத்தில் அமிழ்ந்திருப்பதாகக் கொள்வோம். அதன் பக்கம் AB திரவ மேற்பரப்பில் அமைந்துள்ளது.

AB = a எனவும் AD = b எனவும் கொள்வோம். இச் செவ்வக தகட்டினை AB க்கு இணையாக பல சிறு பட்டைகளாக பிரிக்கலாம்.

திரவத்தின் மேற்பரப்பிலிருந்து h ஆழத்தில் அமைந்துள்ள dh அகலம் கொண்ட சிறு பட்டையை கருதுவோம்.

இதன் பரப்பளவு $= a.dh$

இதன் மீது செயல்படும் அழுத்தம் $= h\rho g \, adh$

AB பற்றிய இவ்வழுத்தத்தின் திருப்பு திறன்

$= h\rho g \, adh.h$

$= h^2 \rho g \, adh$

எல்லா பட்டைகளின் அழுத்தங்களின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$= \int_0^b h^2 \rho g \, adh$

எல்லா பட்டைகளின் தொகுபயன் அழுத்தம்.

$= \int_0^b h\rho g \, adh$

அழுத்த மையம் AB யிலிருந்து H ஆழத்தில் இருப்பதாக கொண்டால் AB ஐப் பற்றிய , தொகையின் அழுத்தத்தின் திருப்புத்திறன்

$$= H\int_0^b h\rho g a\,dh$$

$$\int_0^b h^2\rho g a\,dh = H\int_0^b h\rho g a\,dh$$

$$\frac{1}{3}b^3 = H\frac{1}{2}b^2$$

$$H = \frac{2}{3}b$$

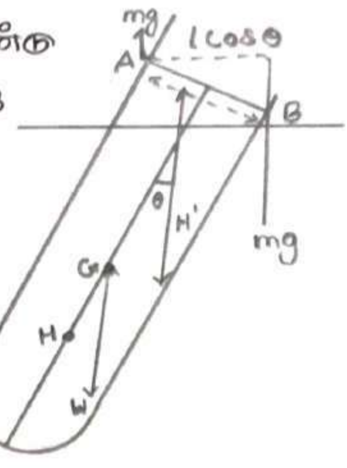
தடையானது ஏரி சீரானதாக இருப்பதால் அழுத்த மையமானது AB, DC பக்கங்களின் மையங்களை இணைக்கும் EF கோட்டில் , திரவ பரப்பிலிருந்து 2/3 b ஆழத்தில் அமையும்.

மிதவை காப்பு மையம் :

ஒரு தடையின்றி மிதக்கும் பொருள் ஒன்றை சிறிது இடப்பெயர்ச்சி அடையுமாறு செய்யும் போது , அதனால் இடம் பெயர்ந்த திரவத்தின் பருமன் ஒரே அளவாம் இருப்பதாக கொள்வோம். இடம் பெயர்ந்த திரவத்தின் புதிய மிதவை திற மையம் வழியாக செல்லக்கூடிய செங்குத்து கோடு பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையம் , பழைய மிதவை திற மையம் ஆகியவற்றை வழியாக செல்லக்கூடிய கோட்டில் வெட்டும் புள்ளியை மிதவை காப்பு மையம் என்பர்.

மிதவை காப்பு மையம் பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையம் ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் மிதவைகாப்புயரம் என்பர்.

ஒரு கப்பலின் மிதவை காப்புயரம் சோதனை மூலம் காணல் :



கப்பலின் எடை இடப்பெயர்ச்சி முறை மூலம் கண்டு கொள்ள வேண்டும். கப்பல் தளத்தின் முனைகள் AB களில் இரு படகுகள் கட்டப்பட்டுள்ளன. படகில் நிரப்பப்படும் நீரின் எடையை பருமனிலிருந்து கணக்கிடலாம். A, B ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள 'l' எனக் கொள்வோம். A, B ல் உள்ள படகுகளில் அடுத்தடுத்து நீர் நிரப்புவது , mg என்ற எடையை A-யிலிருந்து B-க்கு நகர்த்துவதற்கு இணையாகும்.

A-ல் உள்ள அதே நிறை கொண்ட நீர் கொண்டு B-ஐ நிரப்பும் போது கப்பலானது ஒரு சிறிய கோணம் (θ) சுழலுவதாக கொள்வோம். கப்பலில் தொங்க விடப்பட்டுள்ள தூக்கு நூற்குண்டு கொண்டு கோணத்தை அளவிடலாம்.

கப்பலானது சிறிது சாய்ந்திருப்பதால், மிதவை திற மையம் சிறிது மாறுகிறது. H, H' என்பவை முறையே பழைய புதிய மிதவை திற மையங்கள் எனவும், G கப்பலின் புவி ஈர்ப்பு மையம் எனவும் M மிதவை காப்பு மையம் எனவும் GH மிதவை காப்புமரம் எனவும் கொள்வோம். படகு அடுத்தடுத்த நீர் கொண்டு நிரப்பப்படும்போது,

விலக்கு இரட்டை = $mgl \cos\theta$

G என்ற புள்ளியில் செயல்படும் கப்பலின் எடை H-ல் செயல்படும் மிதவை திற விசை ஆகியவற்றின்

மீட்சி இரட்டை = $w\,GM \sin\theta$

$$w\,GM \sin\theta = mgl \cos\theta$$

$$GM = \frac{mgl}{w \tan\theta}$$

θ-ன் மதிப்பு குறைவாதலால் $\tan\theta = \theta$

$$GM = \frac{mgl}{w\theta}$$

இதிலிருந்து மிதவை காப்பு மையம் கணக்கிடலாம்.

குத்துயரத்தால் வளியழுத்த மாறுதல்:

புவியிலிருந்து உயரம் அதிகமாக அதிகமாக வளியழுத்தம் குறைகிறது. இப்போது, வளியழுத்தம் உயரத்தை சார்ந்து எவ்வாறு மாறுதலடைகிறது என்பதற்கான கோவையை வருவிப்போம்.

புவியிலிருந்து x, $x+dx$ உயரத்தில் உள்ள புள்ளிகள் A, B ல் முறையே வளியழுத்தம் P, $P+dP$ என கொள்வோம். புவிக்கு மேல் x உயரத்தில் குறுக்கு பரப்பு a கொண்ட செங்குத்து காற்று உருளை தம்பத்தை கருதுவோம். இந்த உருளையில் உள்ள காற்றின் அடர்த்தி ρ எனக் கொள்வோம். dx மிகக் குறைவு எனக் கொண்டால், காற்றின் சராசரி அடர்த்தி ρ எனக் கொள்ளலாம்.

dx உயரம் கொண்ட காற்று உருளை கீழ்க்கண்ட செயற்பாட்டால் சமநிலையில் உள்ளது.

1. உருளை மேலே உள்ள காற்றால் தோன்றும் $(P+dP)a$ எனும் கீழ் நோக்கிய அழுத்தம்.

2. உருளை கீழே உள்ள மேல் நோக்கிய அழுத்தம் Pa.

3. உருளையில் உள்ள காற்றின் எடை $a\rho g\,dx$ கீழ் நோக்கி செயல்படுகிறது.

காற்று கொண்ட உருளை சமநிலையில் இருக்க, கீழ் நோக்கிய விசையும் மேல் நோக்கிய விசையும், சமமாக இருக்க வேண்டும்.

$$Pa = (P+dP)a + a\rho g\,dx$$

$$dP = -\rho g\,dx$$

வெப்ப நிலை மாறாமல் இருப்பதாகக் கொண்டால் பாயில் விதிப்படி PV ஒரு மாறிலி P/ρ ஒரு மாறிலி அல்லது $P = K\rho$

$$\rho = \frac{P}{K}$$

$$dP = -\frac{P}{K}g\,dx$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{K}\,dx$$

$$\log_e P = -\frac{gx}{K} + C$$

இங்கு C ஒரு மாறிலி

கடல் மட்டத்தில் அழுத்தம் P_0 எனக் கொள்வோம்.

$x = 0$ எனில் $P = P_0$

$$\therefore C = \log_e P_0$$

C ன் மதிப்பினை சமன்பாடு (5) ல் பதிலீடு செய்ய

$$\log\frac{P}{P_0} = -\frac{g}{K}x$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-G/K\,x}$$

$$P = P_0 e^{-G/K\,x}$$

பூமியின் பரப்பில் காற்றின் அடர்த்தி ρ_0 எனக் கொண்டால்

$$\rho_0 \propto P_0 \quad ; \quad \rho \propto P$$

$$\therefore \rho = \rho_0 e^{-g/K\,x}$$

இதுபோல் $x = 1, 2, 3 \ldots$ ல் அழுத்தம் $P_1, P_2 \ldots$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{-g/k} \quad ; \quad \frac{P_2}{P_3} = e^{-g/k}$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{P_2}{P_3} = \frac{P_3}{P_4} = \ldots\ldots = \text{ஒரு மாறிலி}$$

அதாவது $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ பெருக்கு தொடராக உள்ளது. இவ்வாறு இத்தூரங்கள் கூட்டு தொடராக இருந்தால் அப்புள்ளிகளில் உள்ள அழுத்தமானது பெருக்கு தொடராக அமைகிறது.

இயங்கு பாய் பொருளியல் ...

முன்னுரை:

இயக்கத்தில் உள்ள பாய் பொருள்களைப் பற்றி படிப்பது இயங்கு பாய் பொருளியல். நிலைமை பொருளியல் ஒரு திரவத்தில் ஒரு புள்ளியில் உள்ள அழுத்தமானது அதன் செங்குத்து உயரம், திரவத்தின் அடர்த்தி, புவி ஈர்ப்பு முடுக்கம் ஆகியவற்றை சார்ந்திருக்கும். ஆனால் இயக்கத்தில் உள்ள பாய்பொருளானது எந்திர விசை, புவி ஈர்ப்பு விசைகளை மட்டுமின்றி, பாகியல் விசை, மீட்சி விசை ஆகியவற்றையும் எதிர்த்து செயல்பட வேண்டும். இங்கு நாம் எடுத்துக் கொண்ட பாய்பொருள் உராய்வற்றது; இறுக்க முடியாதது எனக் கொள்கிறோம்.

வரிச் சீரியக்கம்:

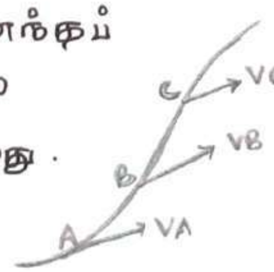
சீரான இயக்கத்தில் எந்த புள்ளியிலும் திசைவேகம் காலத்தை பொறுத்து மாறுபடாது. ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் திசைவேகம் 'v' என்றால் அப்புள்ளியின் வழியே செல்லும் போது எல்லா துகள்களும் அதே v என்ற வேகம் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

ஒரு பாய் பொருளானது ABC என்ற பாதை வழியாக செல்வதாகக் கொள்வோம். A, B, C என்பவை திரவத்தினுள் உள்ள புள்ளிகளாகும். A-ஐ அடையக்கூடிய ஒவ்வொரு புதுத் துகளின் திசைவேகம் V_A ஆக இருக்க வேண்டும். இதன் திசை ABC கோட்டில் A-ல் வரையப்படும் தொடுகோட்டு திசையில் அமையும். இதே போன்று B ஐ அடையும் துகள்களின் திசைவேகம் V_B ஆக இருக்கும். இது V_A-க்கு சமமாகவோ அல்லது மாறுபட்டோ இருக்கலாம். இக்கூற்று C க்கும் உண்மையாகும்.

ABC என்ற கோடு வழியாக பாய் பொருள் துகள்கள்

ஒன்றன் பின் ஒன்றாக செல்கிறது. வெவ்வேறு புள்ளிகளில் இவற்றின் திசைவேகம் மாறுபடாமல் இருக்கும். இவற்றின் திசை, அப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடு கோட்டு திசையில் அமையும். இப்போது ABC வரியை சீரோட்ட வரி என்பர்.

சீரோட்ட வரி என்பது ஒரு வளை கோடு, இதன் எந்தப் புள்ளியிலும் வரையப்படும் தொடுகோடு அப்புள்ளியில் செல்லும் துகளின் திசைவேகத்தின் திசையை தருகிறது. மேலும் சீரோட்ட வரி நேர் கோடாகவோ அல்லது வளை கோடாகவோ இருக்கலாம்.

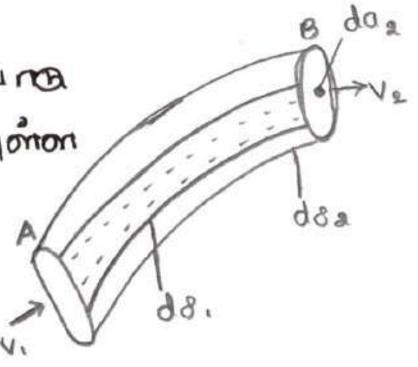


பாய்பொருளின் திசைவேகம் ஒரு வரம்பிற்கு கீழ் இருக்கும் போது மட்டுமே இது வரி சீரியக்கம் கொண்டிருக்கும். இவ்வரம்பு திசைவேகத்தை மாறுநிலைத் திசைவேகம் என்பர். பாய் பொருளின் திசைவேகம் இம்மதிப்பை விட அதிகமாகும் போது தன்நிலை தன்மையை இழக்கும். இந்த இயக்கத்தை கொந்தளிப்பு இயக்கம் என்பர்.

சீரான இயக்கத்திலுள்ள பாய்பொருளில் அதன் இயக்கத்திற்கு செங்குத்து திசையில் A, B என்ற இரு பரப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். படத்தில் இவற்றின் எல்லையில் சீரோட்ட வரிகள் வரையலாம். இவை ஒரு குழாய் போல் அமைகிறது. இதனை ஓட்டக் குழாய் என்பர். ஓட்டக் குழாயின் பக்கங்கள் எல்லாம் ஓட்ட திசையாக இருப்பதால், பாய் பொருள்கள் வெளியிலிருந்து உட்புகவோ அல்லது உள்ளிலிருந்து வெளிவரவோ இயலாது. ஒரு புறம் நுழையும் பாய்பொருள் குழாயின் மறுபுறம் வழியாக தான் வெளிவர முடியும். பக்கவாட்டில் வெளிவர முடியாது.

தொடர்ச்சி சமன்பாடு :

பாய் பொருள்களின் அடிப்படைச் சமன்பாடு தொடர்ச்சி சமன்பாடாகும். இறுகாத் தன்மையுள்ள பாய் பொருள் கட்கு தொடர்ச்சி சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு வருவிக்கலாம்.



AB என்ற ஓட்டக் குழாயின் வழியாக பாய் பொருள் செல்வதாக கொள்வோம். படத்தில் A, B யில் இருக்கு

வெட்டு பரப்பு a_1, a_2 எனக் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சீரோட்ட வரிகள் குழாயின் அச்சுக்கு இணையாகவும் குறுக்கு வெட்டு பரப்பிற்கு செங்குத்தாகவும் இருப்பினும், எல்லா பகுதிகளிலும் ஓட்ட திசைவேகம் சமமாக இருக்க வேண்டிய தேவையில்லை. A, B ல் முறையே திசைவேகம் v_1, v_2 எனக் கொள்வோம்.

அக்குழாயின் ஒரு சிறிய இழையை கருதுவோம். A, B ல் இதன் குறுக்கு வெட்டு பரப்புகள் da_1, da_2 எனக் கொள்வோம். δt நேரத்தில் குழாயின் ஆரம்ப முனையில் கடக்கும் தூரம் ds_1 எனவும், முடிவு முனையில் ds_2 எனவும் கொள்வோம். A, B ஆகிய பகுதிகளில் பாய்ம பொருளின் அடர்த்தி முறையே ρ_1, ρ_2 எனக் கொள்வோம்.

A பகுதியில் ஓரலகு நேரத்தில் குழாயினுள் நுழையும் திரவத்தின் நிறை $= \dfrac{da_1 \, ds_1 \, \rho_1}{\delta t}$

$= da_1 v_1 \rho_1 \quad \because \dfrac{ds_1}{\delta t} = v_1$

B ல் பகுதியில் ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேறும் திரவத்தின் நிறை $= \dfrac{da_2 \, ds_2 \, \rho_2}{\delta t}$

$= da_2 v_2 \rho_2$

குழாயினுள் A-ல் ஓரலகு நேரத்தில் நுழைகின்ற திரவத்தின் நிறை A-ல் பாய்மபொருள்.

ஓட்ட நிறை வீதம் $= \int_0^{a_1} da_1 v_1 \rho_1$

B ல் ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேறும் பாய்ம பொருளின் நிறை B ல் பாய்ம பொருள் ஓட்ட நிறை வீதம்

$= \int_0^{a_2} da_2 v_2 \rho_2$

$= a_2 v_2 \rho_2$

பாய்ம பொருள் இறுகா தன்மை கொண்டமையால் $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. குழாயின் பக்கம் வழியாக பாய்மபொருள் உட்புகவோ வெளிவரவோ முடியாது. ஆகவே குழாயினுள் பாய்மபொருளை அக்கவோ, அழிக்கவோ முடியாது.

∴ A-ல் ஓரலகு நேரத்தில் நுழையும் பாய்பொருளின் நிறை B-ல் ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேறும் பாய் பொருளின் நிறை.

(or) $a_1 v_1 \rho = a_2 v_2 \rho$

(or) $a_1 v_1 = a_2 v_2$

av ஒரு மாறிலி.

இதனை தொடர்ச்சி சமன்பாடு என்பர். av என்பது ஓரலகு நேரத்தில் ஏதாவது ஒரு குறுக்கு வெட்டு பகுதி வழியாகச் செல்லும் பாய் பொருளின் பருமனாகும். ஆகவே இதனை பரும ஓட்ட வீதம் அல்லது இறக்க வீதம் என்பர்.

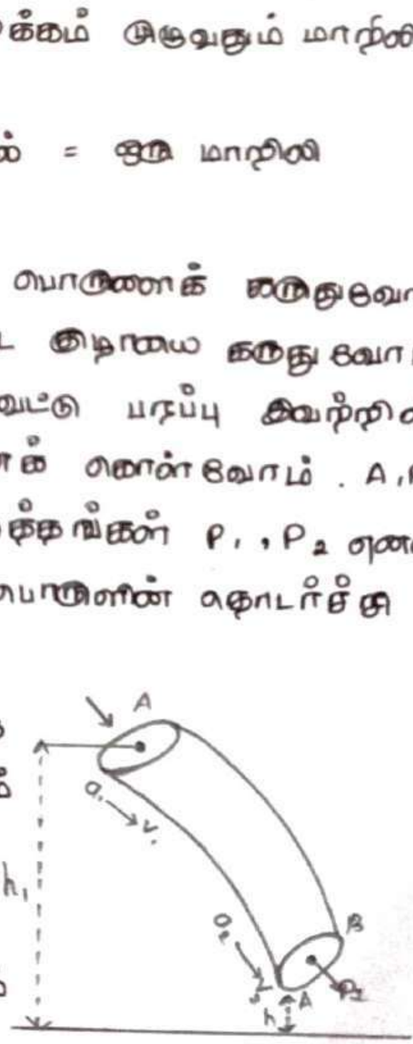
பெர்னோலி தேற்றம் :

பெர்னோலி தேற்றத்தை கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம். சீரான இயக்கத்திலுள்ள இறுகா தன்மையும், பாகியலற்ற தன்மையும் கொண்ட பாய்பொருளின் மொத்த ஆற்றல், இயக்கம் முழுவதும் மாறிலியாக அமையும். அதாவது,

நிலையாற்றல் + இயக்க ஆற்றல் + அழுத்த ஆற்றல் = ஒரு மாறிலி

இதனை பெர்னோலி தேற்றம் என்பர்.

வரி சீர்மைக்கம் கொண்டுள்ள பாய் பொருளைக் கருதுவோம். மாறுபட்ட குறுக்கு வெட்டு பரப்பு கொண்ட ஓட்ட குழாயை கருதுவோம். A, B என்பது குழாயின் செங்குத்து குறுக்கு வெட்டு பரப்பு இவற்றின் குறுக்கு வெட்டு பரப்பளவு முறையே a_1, a_2 எனக் கொள்வோம். A, B ல் திசை வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 எனவும், அழுத்தங்கள் P_1, P_2 எனவும் கொள்வோம். படத்தில் $a_1 > a_2$ ஆகவே பாய்பொருளின் தொடர்ச்சி தத்துவப்படி $v_1 < v_2$.



பாய் பொருள் இறுகாத் தன்மை கொண்டதாக இருப்பின், A-ல் நுழைகின்ற திரவத்தின் பருமனும் B-ல் வெளியேறுகின்ற பருமனும் சமமாக இருக்கும்.

பாய்பொருள் A-யிலிருந்து B-க்கு கடக்கும் போது செய்யப்பட்ட வேலை

$= P_2V - P_1V$

$= V(P_2 - P_1).$

xy என்ற கிடைத்தள கோட்டிலிருந்து, குழாயின் வெட்டு பகுதி A, B ன் மையங்கள் முறையே h_1, h_2 உயரத்தில் இருப்பதாக கொள்வோம்.

பருமன் V கொண்ட பாய்ம பொருளானது A-யிலிருந்து B-க்கு அடையும் போது, ஏற்படும் நிலையாற்றல் இழப்பு

$= mg(h_1 - h_2)$ (m → நிறை)

இயக்க ஆற்றல் இழப்பு $= \frac{1}{2} m(v_1^2 - v_2^2)$

செய்யப்பட்ட வேலை = P.E இழப்பு + K.E இழப்பு.

$$V(P_2 - P_1 = mg(h_1 - h_2) + \frac{1}{2} m(v_1^2 - v_2^2)$$

திரவத்தின் அடர்த்தி ρ எனில்

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$\frac{m}{\rho}(P_2 - P_1) = mg(h_1 - h_2) + \frac{1}{2} m(v_1^2 - v_2^2)$$

$$\frac{P_2}{\rho} - \frac{P_1}{\rho} = gh_1 - gh_2 + \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 \quad \text{(or)}$$

$$\frac{P_2}{\rho} + gh_2 + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{P_1}{\rho} + gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2$$

$\frac{P}{\rho} + gh + \frac{1}{2}v^2$ ஒரு மாறிலியாகும்.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை g-ல் வகுக்க.

$$\frac{P}{g\rho} + h + \frac{v^2}{2g} = \text{ஒரு மாறிலி.}$$

$P/g\rho$ ஐ அழுத்த சிரசு எனவும், $v^2/2g$ ஐ திசைவேக சிரசு எனவும், h ஐ ஈர்ப்பியல் சிரசு எனவும் அழைப்பர்.

ஆகவே பெர்னௌலி தேற்றத்தை கீழ்க்கண்டவாறும் கூறலாம்.

உராய்வற்ற, அமுக்க தன்மையற்ற திரவம் வரி சீரோட்டத்தில் இருக்கும் போது அதில் உள்ள புள்ளிகளில் அழுத்த சிரசு, திசைவேக சிரசு, ஈர்ப்பியல் சிரசு ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலியாகும்.

திரவமானது கிடைத்தள குழாயில் செல்லும் போது, ஏற்றமில்லாமல்
ஆகவே h ஒரு மாறிலி.

$\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{gr}$ ஒரு மாறிலி. (or)

$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho}$ ஒரு மாறிலி

அப்போது. $\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$

இதிலிருந்து திசைவேகம் அதிகமாகும் போது அழுத்தம் குறைகிறது. என்பதும், திசைவேகம் குறையும் போது அழுத்தம் அதிகமாகிறது என்பது தெரிகிறது.

டோரிசெல்லி - தேற்றம் :

தொட்டி ஒன்றில் திரவம் இருப்பதாகக் கொள்வோம் தொட்டியின் பக்கவாட்டில் அமைந்துள்ள வெளித்திறப்பு 'O' லிருந்து திரவத்தின் மேற்பரப்பு 'h' உயரத்தில் இருப்பதாக கொள்வோம். படத்தில் அத்திறப்பு வழியாக திரவம் v என்ற திசைவேகத்தில் வெளியேறுகிறது. இதன் திசைவேகத்தை புறவாக்க திசைவேகம் என்பர்.

தொட்டியின் பரிமாணம் மிக அதிகமாக இருக்கும் போது மேற்பரப்பில் உள்ள திரவத்தின் திசைவேகம் சுழி எனவும், இப்பரப்பிலும் O-விலும் உள்ள அழுத்தம் வளியழுத்தம் எனவும் கொள்ளலாம். வளியழுத்தம் திரவ ஓட்டத்தில் பங்கு கொள்வதில்லை. திரவ ஓட்டம் நிலை அழுத்தத்தால் ஏற்படுகிறது. ஓட்டக் குழாய் திரவ மேற்பரப்பில் ஆரம்பித்து வெளி திறப்பு O-வில் முடிகிறது.

பெர்னௌலி தேற்றப்படி,

மேற்பரப்பில் ஓரலகு நிறையின் மொத்த ஆற்றல். $= K.E + P.E +$ அழுத்த ஆற்றல்

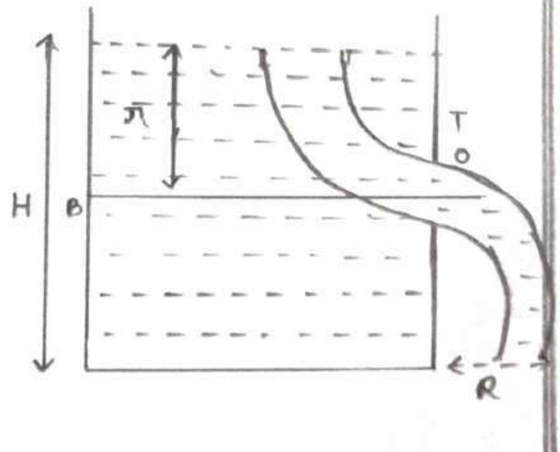
$= 0 + gh + 0$

$= gh$

வெளி திறப்பில் ஓரலகு நிறையின் மொத்த ஆற்றல்

$= \frac{1}{2} v^2 + 0 + 0$

$= \frac{1}{2} v^2$



பெர்னோலி தேற்றப்படி சீரான ஓட்டத்தின் திரவத்தின் மொத்த மாறிலி ஆகும்.

$$\frac{1}{2}v^2 = gh$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

புறவொழுக்கு

புறவொழுக்கு திசைவேகம் $v = \sqrt{2gh}$

டோரிசெல்லி இத் திசைவேகமானது, திரவம் தடையின்றி h உயரத்திலிருந்து விழும் போது அடைகின்ற திசைவேகத்திற்கு சமமாகும் என கூறினார்.

திரவம் அடைந்த திசைவேகம் v எனின் $v^2 - u^2 = 2as$ எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$v^2 - 0 = 2gh \quad \text{(or)}$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

இதனை டோரிசெல்லியின் தேற்றம் அல்லது புறவொழுக்கு விதி என்பர். இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம்.

வெளித் திறப்பு ஒன்றின் வழியாக வெளியேறும் திரவத்தின் புறவொழுக்குத் திசைவேகமானது, திரவ மேற்பரப்பிற்கும், வெளித் திறப்பிற்கும் இடையே உள்ள செங்குத்துயரம் வழியாக விழும் போது அடைகின்ற, திசைவேகத்திற்கு சமமாகும்.

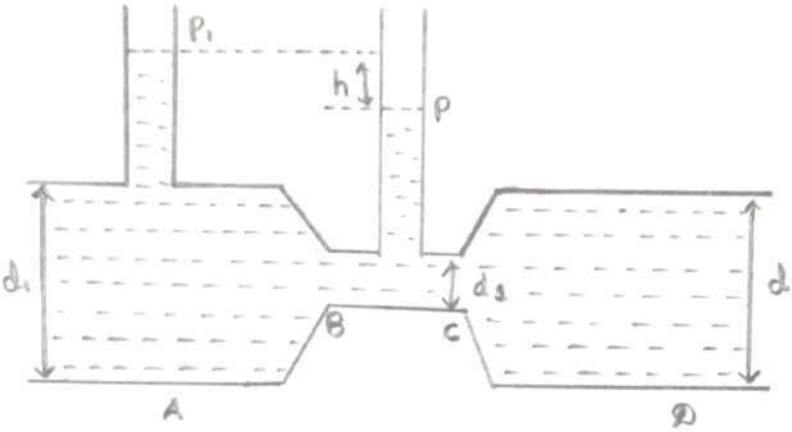
உள்ளுராய்வும், பாகியலும் இல்லாத திரவம் கிடையாது. ஆகவே நடைமுறையில் இலட்சிய திசைவேகம் $v = \sqrt{2gh}$ ஆக இருக்க முடியாது. சோதனை மூலம் கணக்கிடும் திசைவேகம் 'v' ஆனது சற்றுக் குறைவாக இருக்கும். இதன் மதிப்பு $C_v\sqrt{2gh}$ ஆகும். இங்கு C_v ஆனது திசைவேக எண் என்பர். இதன் மதிப்பு 0.95 லிருந்து 0.99 வரை அமையும். பொதுவாக இதனை 0.97 எனக் கொள்வோம்.

உண்மையான புறவொழுக்குத் திசைவேகம் $v = 0.97\sqrt{gh}$.

பெர்னோலி சமன்பாட்டின் வினை பயன்கள் :

1. வெஞ்சுரி மீட்டர்

பாய் பொருட்களின் வேகத்தை அளவிட வெஞ்சுரி மீட்டர் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதனை நீரின் வேகத்தை அளவிட பயன்படுத்தும் போது நீர் வெஞ்சுரி மீட்டர் என்பர். திசைவேகம் சிறுமமாக இருக்கும் போது அழுத்தம் பெருமமாகவும், திசைவேகம் பெருமமாக இருக்கும் போது அழுத்தம் சிறுமமாகவும் இருக்கும் என்ற பெர்னோலி தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது வெஞ்சுரி மீட்டர்.



வெஞ்சுரி மீட்டர் அமைப்பு படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதில் மூன்று பகுதிகள் உள்ளன.

1. குவிக்கும் கூம்பு AB. இதன் விட்டம் A-ல் d_1 எனவும், B-ல் d_2 எனவும் கொள்வோம். இவ்விட்டமானது A யிலிருந்து வேகமாக குறைகிறது.

2. குறுகிய கிடைத்தள பகுதி BC. இதன் விட்டம் D_2 சீரானதாகும். இதனை தொண்டை என்பர்.

3. விரி கூம்பு CD. இதனை விரவிப்பான் என்பர். C ல் இதன் உள்விட்டம் d_1, Dல் இதன் வெளிவிட்டம் d_1. அங்கு விட்டமானது மெதுவாக அதிகரிக்கிறது. ஆகவே A-ல் உள்விட்டமும், D ல் வெளிவிட்டமும் சமமாகும்.

தொண்டை பகுதியில் உள்ள விட்டத்திற்கும், வெளி விட்டத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் d_2/d_2 தொண்டை விகிதம் என்பர். இதன் மதிப்பு 1/4 லிருந்து 1/3 வரை அமையும்.

இணைக்கும் குழாய் AB நீரோட்ட குறுக்கு வெட்டு பரப்பினைக் குறைத்து, திசைவேகத்தை அதிகரித்து, தொண்டை பகுதியில் அழுத்தத்தை குறைக்கிறது. இவ்வாறு குழாயின் அகவாய் முனைக்கும் தொண்டைக்கும் இடையே நல்ல அழுத்த வேறுபாடு தோன்றுகிறது. நீரோட்ட குறுக்கு வெட்டு பரப்பை அதிகரித்து அதன் திசை வேகத்தையும், அழுத்தத்தையும் பழைய நிலைக்கு கொண்டு வருகிறது.

இவ்வாறு நீரானது தொண்டை பகுதியை அடையும் போது முடுக்கமடைகிறது. தொண்டை பகுதியிலிருந்து வெளியேறும் போது எதிர் முடுக்கம் அடைகிறது. எதிர் முடுக்கம் மெதுவாக நடைபெற வேண்டும். இதற்காகவே, விரி குழாயின் சரிவு மெதுவாக அதிகரிக்கப்படுகிறது.

வெஞ்சுரி மீட்டரை பயன்படுத்தும் போது கீழ்கண்டவற்றை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

1. அழுத்த வேறுபாடு இணைக்கும் குழாயின் அகவாய் A க்கும் தொண்டை பகுதிக்குமிடையே தான் அளவிட வேண்டும். தவிர விரி குழாயின் வெளிவாய்க்கும், தொண்டை பகுதிக்குமிடையே அளவிடக் கூடாது.
2. வெஞ்சுரி மீட்டரில் திரவம் முழுமையாக ஓட வேண்டும். எந்த இடை வெளியும் இருக்க கூடாது. காற்றிருந்தால் நீரின் ஓட்ட தொடர்ச்சி பாதிக்கும்.

உள்வாய் A க்கும் தொண்டை பகுதிக்கும் இடையே அழுத்த வேறுபாடு அளவிட A யிலும் தொண்டை பகுதியிலும் குறுகிய செங்குத்து குழாய் பொருத்தப்பட்டுள்ளது.

Unit- III: Dynamics and Friction

Moment of Inertia and radius of gyration (Definition only) – Parallel axes theorem and perpendicular axes theorem – Kinetic energy of a body rotating about an axes through its center of mass – compound pendulum –Bifilar pendulum (Parallel threads)

Forces of friction – Laws of friction – angle of friction, Resultant reaction and cone of friction- Equilibrium of a body on a rough inclined plane (with and without force) to the horizontal – Friction clutch.

Moment of inertia

Moment of inertia is defined as the quantity expressed by the body resisting angular acceleration which is the sum of the product of the mass of every particle with its square of a distance from the axis of rotation. ... Moment of Inertia is also known as the angular mass or rotational inertia. $I = \frac{L}{\omega}$

I=inertia

L=angular momentum

ω=angular velocity

Radius of Gyration

The moment of inertia of a body about an axis is sometimes represented using the radius of gyration. Now, what do you mean by the radius of gyration? We can define the radius of gyration as the imaginary distance from the centroid at which the area of cross-section is imagined to be focused at a point in order to obtain the same moment of inertia. It is denoted by *k*.

Radius of Gyration Formula

The formula of moment inertia in terms of the radius of gyration is given as follows:

$I = mk^2$ (1)

where *I* is the moment of inertia and *m* is the mass of the body

Accordingly, the radius of gyration is given as follows

k= √ Im (2)

The unit of the radius of gyration is mm. By knowing the radius of gyration, one can find the moment of inertia of any complex body equation (1) without any hassle.

Consider a body having *n* number of particles each having a mass of *m*. Let the perpendicular distance from the axis of rotation be given by $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. We know that the moment of inertia in terms of radius of gyration is given by the equation (1). Substituting the values in the equation, we get the moment of inertia of the body as follows

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2$$ ………… (3)

If all the particles have the same mass then equation (3) becomes

$$I = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2)$$
$$= \frac{mn(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2)}{n}$$

We can write mn as M which signifies the total mass of the body. Now the equation becomes

$$I = M\frac{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2)}{n}$$

………… (4)

From equation (4), we get

$$MK^2 = M\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2}{n}\right)$$
$$\text{or, } K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2}{n}}$$

From the above equation, we can infer that the radius of gyration can also be defined as the root-mean-square distance of various particles of the body from the axis of rotation.

Parallel axis theorem

The moment of inertia of a body about an axis parallel to the body passing through its center is equal to the sum of moment of inertia of body about the axis passing through the center and product of mass of the body times the square of distance between the two axes.

Parallel axis theorem statement can be expressed as follows:

$I = Ic + Mh^2$

Where,

I is the moment of inertia of the body

Ic is the moment of inertia about the center

M is the mass of the body

h^2 is the square of the distance between the two axes

Parallel Axis Theorem Derivation

Let Ic be the moment of inertia of an axis which is passing through the center of mass (AB from the figure) and I be the moment of inertia about the axis A'B' at a distance of h.

Consider a particle of mass m at a distance r from the center of gravity of the body. Then,
Distance from A'B' = r + h

$I = \sum m (r + h)^2$

$I = \sum m (r^2 + h^2 + 2rh)$

$I = \sum mr^2 + \sum mh^2 + \sum 2rh$

$I = Ic + h2\sum m + 2h\sum mr$

$I = Ic + Mh^2 + 0$

$I = Ic + Mh^2$

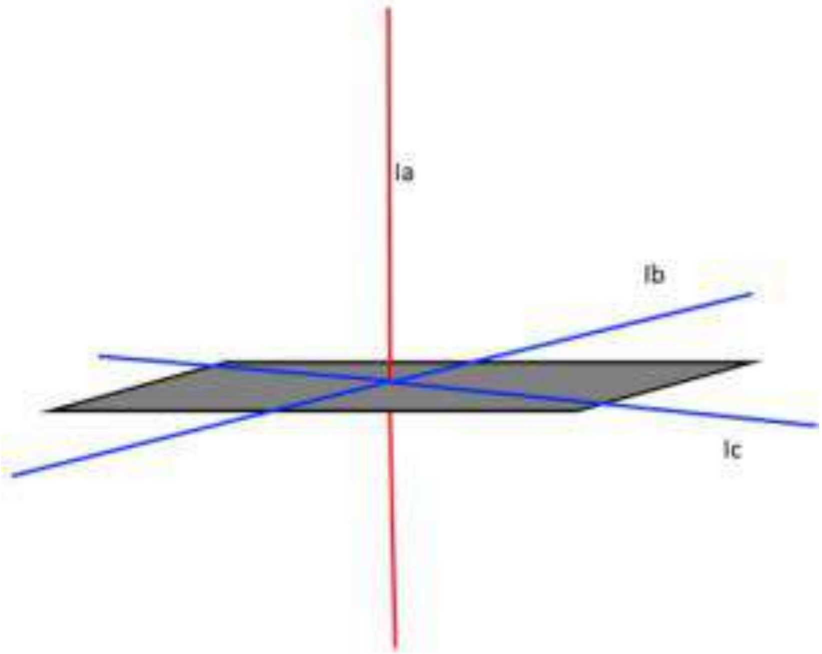
Hence, the above is the formula of parallel axis theorem.

Perpendicular Axis Theorem

For any plane body the moment of inertia about any of its axes which are perpendicular to the plane is equal to the sum of the moment of inertia about any two perpendicular axes in the plane of the body which intersect the first axis in the plane.

Perpendicular axis theorem is used when the body is symmetric in shape about two out of the three axes if the moment of inertia about two of the axes are known the moment of inertia about the third axis can be found using the expression:

$I_a=I_b+I_c$



Say in an engineering application we have to find the moment of inertia of a body, but the body is irregularly shaped, and the moment of in these cases we can make use of the parallel axis theorem to get the moment of inertia at any point as long as we know the center of gravity of the body, this is a very useful theorem in space physics where the calculation of moment of inertia of space-crafts and satellites, making possible for us to reach the outer planets and even the deep space. The theorem of perpendicular axis helps in applications where we don't have access to one axis of a body and it is vital for us to calculate the moment of inertia of the body in that axis.

Kinetic energy of a body rotating about an axes through its center

A rotating object also has kinetic energy. When an object is rotating about its center of mass, its rotational kinetic energy is $K = ½I\omega^2$. Rotational kinetic energy = ½ moment of inertia * (angular speed)^2. When the angular velocity of a spinning wheel doubles, its kinetic energy increases by a factor of four.

Energy in rotational motion is not a new form of energy; rather, it is the energy associated with rotational motion, the same as kinetic energy in translational motion. However, because kinetic energy is given by $K=1/2mv^2$, and velocity is a quantity that is different for every point on a rotating body about an axis, it makes sense to find a way to write kinetic energy in terms of the variable ωω, which is the same for all points on a rigid rotating body. For a single particle rotating around a fixed axis, this is straightforward to calculate. We can relate the angular velocity to the magnitude of the translational velocity using the relation $v_t = \omega r$,

where r is the distance of the particle from the axis of rotation and v_t is its tangential speed. Substituting into the equation for kinetic energy, we find

$K=1/2mv^2_t=1/2\ m(\omega r)^2=1/2(mr^2)\omega^2$.

In the case of a rigid rotating body, we can divide up any body into a large number of smaller masses, each with a mass mj and distance to the axis of rotation rj, such that the total mass of the body is equal to the sum of the individual masses: M=∑jmj. Each smaller mass has tangential speed vjvj, where we have dropped the subscript *t* for the moment. The total kinetic energy of the rigid rotating body is

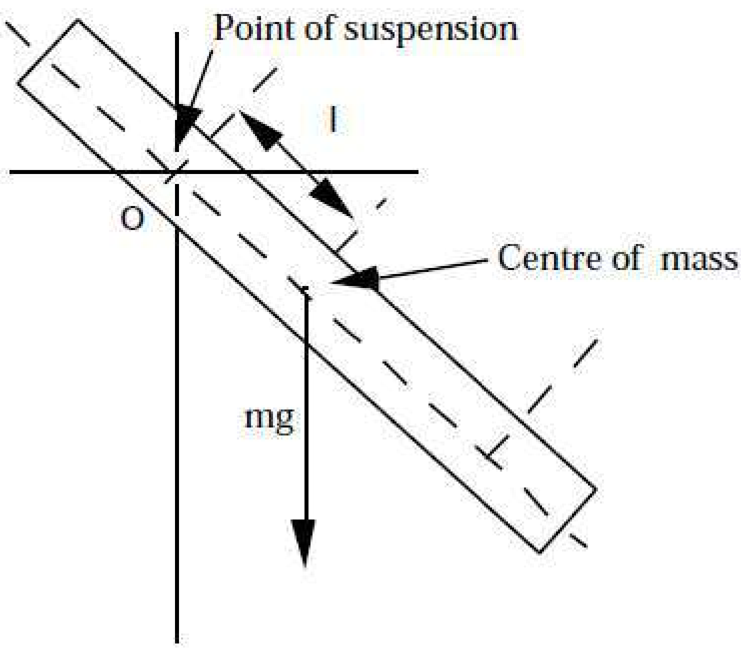
$K=\sum j1/2mjvj^2=\sum j1/2mj(rj\omega j)^2$

and since ωj=ωωj=ω for all masses,

$K=1/2(\sum jmjr^2j)\omega^2$.

Compound Pendulum

In this experiment we shall see how the period of oscillation of a compound, or physical, pendulum depends on the distance between the point of suspension and the center of mass. The compound pendulum you will use in this experiment is a one metre long bar of steel which may be supported at different points along its length, as shown in Fig. 1.



If we denote the distance between the point of suspension, O, and the center of mass, by l , the

period of this pendulum is:

$$T = 2\pi(\frac{k^2+l^2}{gl})^{1/2}$$

where k is the radius of gyration of the bar about an axis passing through the centre of mass. You should derive this expression.

The period of a simple pendulum of length l' is:

T = 2p(l ¢□ g)$^{1/2}$

By equating Eqs (1) and (2) and solving for l , we may find the values of l such that the compound

pendulum has the same period as that of a a simple pendulum of length l':

l =l ¢ ± (l ¢^{2} - 4k^2)$^{1/2}$/2)

As you can see, there are two values of l , which we will label l 1 and l 2, for which the period of

the compound pendulum is the same as that of the given simple pendulum.

There is a value of l for which the compound pendulum has a minimum period. The minimum

period may be found from Eq. (1) by setting:

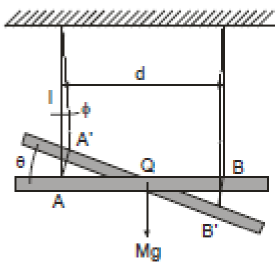
dT/dl= 0

One finds:

Tmin = 2p (2$k/g)^{1/2}$

Bifilar Pendulum

The bifilar suspension is used to determine the moment of inertia of a body about an axis passing through its centre of gravity. The body is suspended by two parallel cords of length "l", at a distance "d" apart. If the mass of the body is "M", then the tension in either cord is Mg/2. If the system is now displaced through s small angle □ at its central axis, then an angular displacement ϕwill be produced at the supports



If both angles are small, then $\ell\phi = \left(\frac{d}{2}\right)\theta$

The restoring force at the point of attachment of the thread B and B_1 will be –

$$\frac{Mg}{2}\sin\phi = \frac{Mg}{2}\phi \text{ (for small } \phi\text{)}$$

Since $\phi = \left(\frac{d\theta}{2\ell}\right)$, the restoring force = $Mg\frac{d\theta}{4\ell}$, and the restoring couple is thus $-Mgd\frac{d\theta}{4\ell}$.

Giving an equation of motion $I\ddot{\theta} = \frac{-Mgd^2.\theta}{4\ell}$ i.e., $\ddot{\theta} + \frac{Mgd^2.\theta}{4I\ell} = 0$

Therefore, the motion is S.H.M. of periodic time, $T = 2\pi\sqrt{\frac{4I\ell}{Mgd^2}}$

Therefore, $I = \frac{mgd^2T^2}{16\pi^2\ell}$

Alternatively, T may be expressed as: $T = 2\pi.\frac{2K}{d}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, since $K^2 = \frac{I}{M}$

where d is the distance between the wires (m)
ℓ is the length of suspension (m)
K is the radius of gyration of the body about its centre of gravity.

Friction

Forces that resists the sliding or rolling of one solid object over another. Frictional forces, such as the traction needed to walk without slipping, may be beneficial, but they also present a great measure of opposition to motion. About 20 percent of the engine power of automobiles is consumed in overcoming frictional forces in the moving parts.

Laws of friction:

There are five laws of friction and they are:

- The friction of the moving object is proportional and perpendicular to the normal force.
- The friction experienced by the object is dependent on the nature of the surface it is in contact with.
- Friction is independent of the area of contact as long as there is an area of contact.

- Kinetic friction is independent of velocity.
- The coefficient of static friction is greater than the coefficient of kinetic friction.

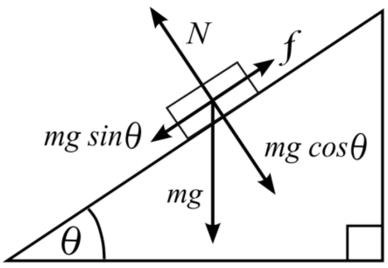
Angle of friction, Resultant reaction and cone of friction:

For the maximum angle of static friction between granular materials, see Angle of repose.

For certain applications, it is more useful to define static friction in terms of the maximum angle before which one of the items will begin sliding. This is called the *angle of friction* or *friction angle*. It is defined as:

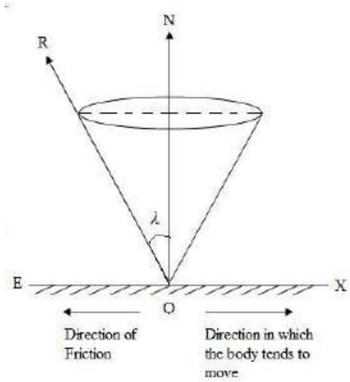
$$\tan \theta = \mu_s$$

where θ is the angle from horizontal and μ_s is the static coefficient of friction between the objects.[47] This formula can also be used to calculate μ_s from empirical measurements of the friction angle.



Let *ON* represent the normal reaction offered by a surface on a body (Fig.14.1). If *OX* is the direction in which the body tends to move then the force of friction acts in the opposite direction i.e, along *OE*. If the body be in limiting equilibrium the resultant *R* makes an angle λ with the normal *ON*.

Suppose the body is at the point of sliding in other direction, it is easily seen that the resultant reaction will make the same angle λ with the normal. Hence, when limiting friction is offered the line of action of the resultant reaction should always lie on the surface of an inverted right circular cone whose semi-vertex is λ. This cone is called the *cone of friction*.



Equlibrium of a body on a inclined plane:

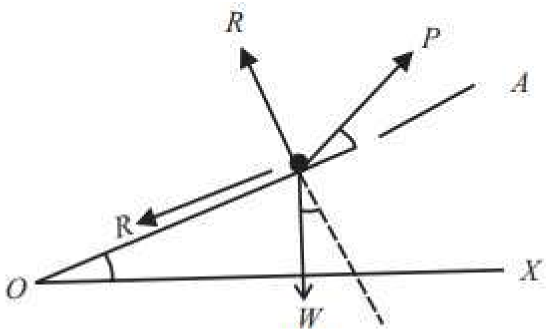
For a body in equilibrium on a rough inclined surface that is acted on only by the weight of and the normal reaction force on the body, it is the case that$mg\theta=mg\mu\theta$,sin cos where θ is the angle the surface makes with the horizontal, μ is the coefficient of static friction between the body and the surface, m is the mass of the body, and g is acceleration due to gravity.

When an applied force acts on a body in equilibrium on a rough inclined plane, parallel to the plane, the magnitude of the friction must equal the sum of the net force on the body due to its weight and the normal reaction on it and the applied force.

A force that acts on a body in equilibrium on a rough inclined surface that does not act parallel to the surface changes the normal reaction force and frictional force on the body. Changing the normal reaction force necessitates that the perpendicular components of the applied force be equated with perpendicular components of the weight of the body, the normal reaction force on the body, and the frictional force on the body to determine any of these forces other than the weight of the body.

The magnitude of the resultant of the weight of a body on a rough inclined plane and the normal reaction on the body can be greater than the limiting friction between the body and the plane. If no external force acts on the body, the body cannot be in equilibrium.

An external force acting upward parallel to the plane can maintain the equilibrium of the body. There are two possible values for the magnitude of this force. These are given by$F=F+L$maxand$F=F-L$,minwhere F is the magnitude of the resultant of the weight of the body and the normal reaction force on it and L is the magnitude of the limiting friction.



FRICTION CLUTCH

A clutch is a mechanical device that engages and disengages the power transmission , especially from driving shaft to driven shaft. In the simplest application, clutches connect and disconnect two rotating shafts (drive shafts or line shafts). In these devices, one shaft is typically attached to an engine or other power unit (the driving member) while the other shaft (the driven member) provides output power for work.

MAIN PARTS OF A CLUTCH

It consists of (a) a driving member, (b) a driven member, and (c) an operating member. Driving member has a flywheel which is mounted on the engine crankshaft. A disc is bolted to flywheel which is known as pressure plate or driving disc. The driven member is a disc called clutch plate. This plate can slide freely to and fro on the clutch shaft. The operating member consists of a pedal or lever which can be pressed to disengaged the driving and driven plate.

TYPES OF CLUTCHES

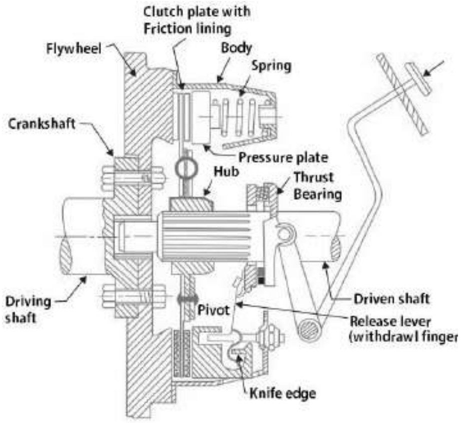
1) Positive contact clutches i. jaw clutches ii.toothed clutches 2) Friction clutches i.Disc clutches ii.Cone clutches iii.centrifugal clutches

PRINCIPLE OF CLUTCH

It operates on the principle of friction. When two surfaces are brought in contact and are held against each other due to friction between them, they can be used to transmit power. If one is rotated, then other also rotates. One surface is connected to engine and other to the transmission system of automobile. Thus, clutch is nothing but a combination of two friction surfaces.

Mechanical clutches 1)Positive contact clutches i. jaw clutches ii.toothed clutches 2)Friction clutches i.Disc clutches ii.Cone clutches iii.centrifugal clutches.

System Components Flywheel: Transfers engine power to the clutch Input shaft: Transfers power from clutch to the transmission Clutch Disk (clutch): Splined to input shaft; transfers power from engine to the input shaft Pressure Plate Assembly: Spring pressure tightly holds the clutch to the flywheel



நிலைமத் திருப்புத்திறன் மற்றும் அதன் முக்கியத்துவம் :

நியூட்டனின் முதல் இயக்க விதியின் படி, புறக்காரணியான விசையொன்று செயல்படாத வரை பொருளொன்று தொடர்ந்து தனது ஓய்வு நிலையை அல்லது சீரான இயக்க நிலையை மாற்றிக் கொள்ள முடியாது. பொருள் தனது ஓய்வு நிலையை அல்லது சீரான இயக்க நிலையைத் தானே மாற்றிக்கொள்ள முடியாத தன்மை நிலைமம் எனப்படும். நிலைமம் என்பது பருப்பொருளின் அடிப்படையான பண்பாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட விசைக்கு, நிறை அதிகமாக இருப்பின், இயக்கத்திற்கான எதிர்ப்பு அதிகமாக இருக்கும், அல்லது நிலைமம் அதிகமாக இருக்கும். ஆகவே நேர்க்கோட்டியக்கத்தில் நிலைமத்தினை பொருளின் நிறை அளவிடுகிறது.

இது போன்றே, சுழல் இயக்கத்திலும், குறிப்பிட்ட அச்சை பொருத்து சுழலும் பொருளொன்று, அதன் நிலையில் ஏற்பட வேண்டிய மாற்றத்தை எதிர்க்கும். எதிர்ப்பின் அளவு, பொருளின் நிறையையும் சுழலும் அச்சைப் பொருத்த நிறையின் பரவலையும் சார்ந்தது. சுழல் இயக்கத்தில் நிலைமத்தை, அச்சைப் பற்றிய பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் எனலாம்.

நேர்க்கோட்டியக்கத்தில் நிறை ஆற்றும் பங்கினைப் போன்று சுழல் இயக்கத்தில் நிலைமத் திருப்புத் திறன் பங்காற்றுகிறது. மேலும், சுழலும் நிலையில் மாற்றம் ஏற்படுத்தத் திருப்பு விசையைச் செயல்படுத்த வேண்டியுள்ளது.

சுழலும் பொருளின் இயக்க ஆற்றலும் திண்மப் பொருளின் நிலைமத் திருப்புத் திறனும் :

திண்மப் பொருளொன்று XOX' என்ற அச்சைப் பொருத்து ω கோண திசைவேகத்துடன் சுழல்வதாகக் கருதுக. சுழற்சியின் அச்சிலிருந்து m_1, m_2, m_3 .... என்ற நிறைகளை உடைய துகள்கள் முறையே r_1, r_2, r_3 .... என்ற தொலைவுகளில் இருப்பதாகக் கருதுக. அனைத்து துகள்களின் கோணத் திசைவேகம் சமம். ஆனால் துகள்கள் வெவ்வேறு நேர்க்கோட்டு திசைவேகங்களுடன் சுழல்கின்றன.

துகள்களின் நேர்கோட்டுத் திசை வேகங்கள் $v_1, v_2, v_3 \ldots$ என இருக்கட்டும்.

முதல் துகளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

ஆனால் $v_1 = r_1 \omega$

முதல் துகளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2$

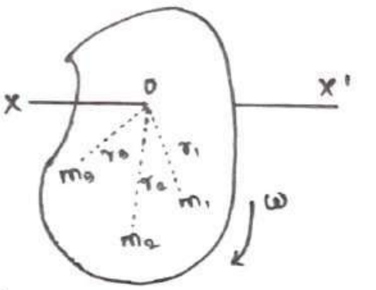
$$= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2$$

அது போன்று, இரண்டாவது துகளின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2$$

மூன்றாவது துகளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2$

சுழலும் திண்மப் பொருளின் இயக்க ஆற்றல், அனைத்து துகள்களின் இயக்க ஆற்றல்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் ஆகும்.



சுழல் இயக்க ஆற்றலும் நிலைமத் திருப்புத் திறனும்

<u>சுழல் இயக்க ஆற்றல்</u> :

$$= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 \omega^2 + m_2 r_2^2 \omega^2 - m_3 r_3^2 \omega^2 + \ldots m_n r_n^2 \omega^2)$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots m_n r_n^2)$$

அதாவது $E_R = \frac{1}{2} \omega^2 \left[\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right]$

நேர்க்கோட்டியக்கத்தில், இயக்க ஆற்றல் $= \frac{mv^2}{2}$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டுடன் (1) - ஐ ஒப்பிட $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ என்பது நிலைமப் பண்பினை வகிக்கிறது என அறியமுடிகிறது.

ஆகவே சுழலும் திண்ம பொருளின் சுழலும் அச்சைப் பொறுத்தே நிலைம திருப்பு திறனாகும்.

நிலைமத் திருப்பு திறன்,

$$I = \text{நிறை} \times (\text{தொலைவு})^2$$

சுழல் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2}\omega^2 I$

$\omega = 1\ rad\,s^{-1}$ என்ற போது சுழல் இயக்க ஆற்றல் $= E_R\ \frac{1}{2}(1)^2 I$

அல்லது $I = 2E_R$

1 ரேடியன் /வினாடி கோணத் திசைவேகத்துடன் சுழலும் பொருளின் இயக்க ஆற்றலின் இருமடங்கு நிலைமத் திருப்புத் திறனுக்குச் சமம் ஆகும். நிலைம திருப்புதிறனின் அலகு $kg\,m^2$ அதன் பரிமாண வாய்ப்பாடு ML^2

சுழற்சியின் ஆரம்:

சுழலும் திண்மப் பொருளின் நிலைமத் திருப்பு திறன்.

$$I = \sum_{i=1} m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots m_n r_n^2$$

திண்ம பொருளின் துகள்கள் அனைத்தும் சம நிறையைப் பெற்றிருப்பின், அதாவது $m_1 = m_2 = m_3 = \dots m$ எனில், மேற்கண்ட சமன்பாடானது,

$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + mr_3^2 + \dots mr_n^2$$

$$= m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots r_n^2)$$

$$I = nm\left[\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2}{n}\right]$$

இதில் n என்பது திண்மப் பொருளில் உள்ள துகள்களின் எண்ணிக்கையாகும்.

$$\therefore I = MK^2$$

இதில் $M = nm$ = பொருளின் மொத்த நிறை மற்றும்

$$K^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2}{n}$$

$$K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2}{n}}$$

K என்பது சுழற்சியின் அச்சைப் பொறுத்த நிலைமப் பொருளின் சுழற்சியின் ஆரம் ஆகும்.

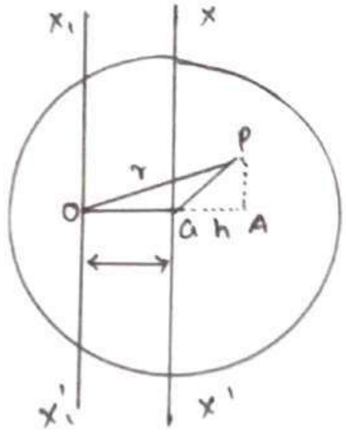
பொருளின் சுழற்சியின் அச்சிலிருந்து துகள்களின் இருமடி மூலச் சராசரி இருமடி தொலைவிற்கு சுழற்சியின் ஆரம் சமமாகும்.

பொருளின் ஒட்டுமொத்த எடையும் செறிந்துள்ள புள்ளிக்கும் சுழற்சி அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட செங்குத்து தொலைவு எனவும் சுழற்சியின் ஆரத்தை வரையறுக்கலாம்.

சமன்பாடு (2) - லிருந்து $K^2 = \frac{I}{M}$ அல்லது $K = \sqrt{\frac{I}{M}}$

<u>நிலைமத் திருப்புத் திறனின் தேற்றங்கள்</u> :

i) இணை அச்சுக்கள் தேற்றம் கூற்று



இணை அச்சுக்களின் தேற்றம்

பொருளின் எந்தவொரு அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்திறனானது, ஈர்ப்பின் மையம் வழியேச் செல்லும் இணை பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் மற்றும் பொருளின் நிறையையும் இரு அச்சுகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவின் இருமடியையும் பெருக்கினால் வரும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவற்றின் கூடுதலுக்கு சமமாகும்.

<u>மெய்ப்பித்தல்</u> :

படத்தில் காட்டியவாறு, ஈர்ப்பின் மையம் G-ல் உள்ள பொருள் ஒன்றை கருதுவோம். XX' என்ற அச்சு ஈர்ப்பின் மையம்

வழியாகவும் பொருளின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் செல்கிறது, X_1X_1' என்ற அச்சு, புள்ளி O வழியாகவும் XX' அச்சுக்கு இணையாகவும் செல்கிறது. இரு இணை அச்சுகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு x ஆகும்.

ஒவ்வொன்றும் m நிறையுள்ள நுண்ணமானத் துகள்களாக, பொருளை பிரிக்கலாம். O விலிருந்து r தொலைவில் உள்ள P என்ற துகளின் X_1OX_1' அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் mr^2 ஆகும்.

X_1X_1' அச்சைப் பற்றி மொத்த பொருளின் நிலைமத் திருப்பு திறன்,

$$I_0 = \sum mr^2$$

புள்ளி P யிலிருந்து, நீட்டப்பட்ட OG க்கு PA என்ற செங்குத்து கோடு வரையவும் P, G ஐ இணைக்கவும்.

Δ OPA ல்

$$PO^2 = OA^2 + AP^2$$

$$r^2 = (x+h)^2 + AP^2$$

$$r^2 = x^2 + 2xh + h^2 + AP^2$$

Δ GPA ல்

$$GP^2 = GA^2 + AP^2$$

$$y^2 = h^2 + AP^2$$

சமன்பாடு (3) - ஐ (2) - ல் பிரதியிட

$$r^2 = x^2 + 2xh + y^2$$

சமன்பாடு (4) - ஐ (1) - ல் பிரதியிட,

$$I_0 = \sum m(x^2 + 2xh + y^2)$$

$$= \sum mx^2 + \sum 2mxh + \sum my^2$$

$$= Mx^2 + My^2 + 2x\sum mh$$

பொருளின் ஈர்ப்பின் மையம் வழியே செல்லும் அச்சு பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன், $My^2 = I_G$ ஆகும். ஈர்ப்பின் மையம் G-ஐப் பொறுத்து பொருள் சமநிலையில் இருப்பதால், ஈர்ப்பின் மையத்தைச் சார்ந்து அனைத்து துகள்களின் திருப்பு திறன்களின்

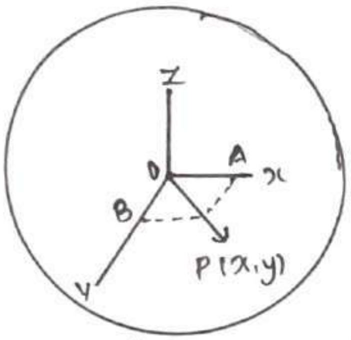
கூடுதல் சுழியாகும்.

$$\sum (mg)(h) = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \sum mh = 0$$

$$I_O = Mx^2 + I_G$$

இவ்வாறு இணை அச்சுகள் தேற்றத்தை மெய்ப்பிக்கலாம்.

ii) செங்குத்து அச்சுகள் தேற்றம் கூற்று



செங்குத்து அச்சுகளின் தேற்றம்.

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று அச்சுகள் பொதுவான புள்ளியில் வெட்டுமாறு இருக்க. சமதள மெல்லிய பரப்புடைய பொருளின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சு பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறனானது, தளத்திலேயே அமைந்த ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுக்களைப் பற்றிய நிலைமத் திறன்களின் கூடுதலுக்கு சமம்.

மெய்ப்பித்தல் :

படத்தில் காட்டியவாறு தளத்தில் அமைந்த OZ மற்றும் OY அச்சுக்களை உடைய சமதள மெல்லிய பரப்பினைக் கிறைக்கவும்.

OZ என்ற அச்சு, O வழியாகவும் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் செல்கிறது. ஒவ்வொன்றும் m நிறையுடைய ஏராளமான துகள்களாக மெல்லிய பரப்பு பிரிக்கப்படுகிறது. O-விலிருந்து r தொலைவில் உள்ள P என்ற துகள் (x, y) கூறுகளை கொண்டுள்ளது.

$$\therefore r^2 = x^2 + y^2$$

OZ அச்சைப் பொருத்து துகள் P நிலைம திருப்பு திறன் $= mr^2$

OZ அச்சைப் பொருத்து மொத்த பரப்பின் நிலைமத் திருப்பு திறன், $I_z = \sum mr^2$

OX அச்சைப் பொருத்துப் மொத்தப் பரப்பின் நிலைமத் திருப்புத் திறன், $I_x = \sum my^2$

இதே போன்று $I_y = \sum mx^2$

$$I_z = \sum mr^2 = \sum m(x^2 + y^2)$$

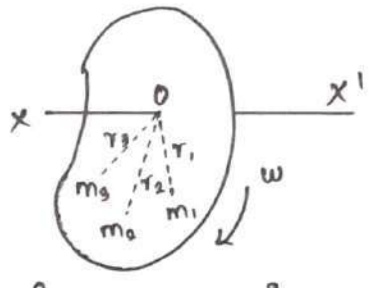
$$I_z = \sum mx^2 = \sum my^2 = I_y + I_x$$

$$\therefore I_z = I_y + I_x$$

இவ்வாறு செங்குத்து அச்சுகளின் தேற்றத்தை மெய்ப்பிக்கலாம்.

திண்ம பொருளின் கோண உந்தம்:

சுழற்சியின் அச்சிலிருந்து $r_1, r_2, \dots r_n$ தொலைவுகளில் உள்ள $m_1, m_2 \dots m_n$ நிறைகள் உடைய துகள்களின் தொகுதியை கருதுவோம். $v_1, v_2, \dots v_n$ என்பன துகள்களின் நேர்க்கோட்டுத் திசை வேகங்களாகும்.



திண்மப் பொருளின் கோண உந்தம்.

முதல் துகளின் நேர்க்கோட்டு உந்தம் = $m_1 v_1$

$v_1 = r_1 \omega$ எனில்

முதல் துகளின் நேர்க்கோட்டு உந்தம் = $m_1 (r_1 \omega)$

முதல் துகளின் நேர்க்கோட்டு உந்தத்தின் திருப்புத்திறன்

= நேர்க்கோட்டு உந்தம் × செங்குத்து தொலைவு

= $(m_1 r_1 \omega) \times r_1$

முதல் துகளின் கோண உந்தம் = $m_1 r_1^2 \omega$

இது போன்று இரண்டாவது துகளின் கோண உந்தம் = $m_2 r_2^2 \omega$

மூன்றாவது துகளின் கோண உந்தம் $= m_3 r_3^2 \omega$

திண்மப் பொருளின் கோண உந்தம் என்பது சுழற்சியின் அச்சை பொருத்து, சுழலும் திண்மப் பொருளின் அனைத்து துகள்களின் நேர்க்கோட்டு உந்தங்களின் திருப்பு திறன்களின் கூடுதல் ஆகும்.

∴ சுழலும் திண்மப் பொருளின் கோண உந்தம் = அனைத்து துகள்களின் கோண உந்தங்களின் கூடுதல்.

அதாவது,

$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_3 r_3^2 \omega \ldots m_n r_n^2 \omega$$

$$L = \omega [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots m_n r_n^2]$$

$$= \omega \left[\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right]$$

$$\therefore L = \omega I$$

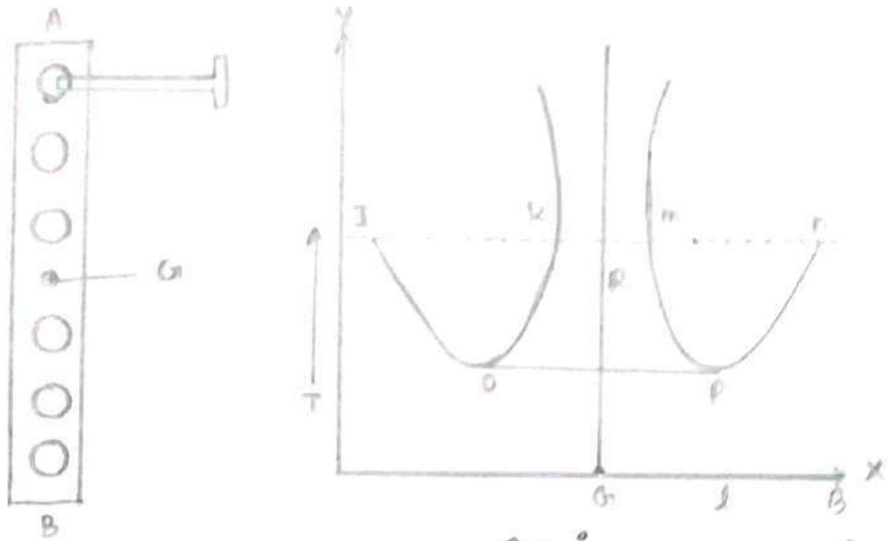
இதில் $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ என்பது சுழற்சியின் அச்சை பொருத்து சுழலும் திண்மப் பொருளின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் ஆகும்.

கூட்டு ஊசலைப் பயன்படுத்தி g காணல் : (சட்ட ஊசல்)

சட்ட ஊசல் கூட்டு ஊசலின் எளிய அமைப்பாகும். இது உலோகத்தாலான சட்டமாகும். (AB) இச்சட்டத்தின் நீள்வாக்கில் சம தொலைவில் பல துளைகள் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு கத்தி முனையை பயன்படுத்தி, எத்துளையிலும் தொங்கவிட்டு செங்குத்துத் தளத்தில் அலைவுறச் செய்யலாம்.

முதலில் இவ்வூசலின் புவி ஈர்ப்பு மையம் 'G' காண வேண்டும். ஊசலை ஒரு முனையில் உள்ள துளையில் தொங்க விட வேண்டும். புவி ஈர்ப்பு மையம் 'G' க்கும் தொங்கு தளத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம். ஊசலின் நீளமாகும். இப்போது ஊசலை அலைவுறச் செய்து அலைவு நேரம் காண வேண்டும். இதே போன்று G-க்கு மேலுள்ள ஒவ்வொரு துளையிலும் தொங்கவிட்டு அலைவு நேரம் காண வேண்டும். இதே போன்று G-க்கு மறுபக்கம் உள்ள துளைகளிலும் தொங்கவிட்டு அலைவு நேரம் காண வேண்டும்.

நீளத்திற்கும், அலைவு நேரத்திற்கும் வரைபடம் வரைந்தால் வரைபடம் படத்தில் காட்டியவாறு அமையும்.



தொலைவு G ஐ நெருங்கும் போது முதலில் அலைவு நேரம் குறைந்து சிறும மதிப்பை அடைந்து, பின்பு அதிகரிக்கிறது. அலைவு நேரம் புவி ஈர்ப்பு மையத்தில் ஈறிலியாகும்.

X அச்சிற்கு இணையாக JN எனும் கிடைமட்டக்கோடு வரைவதாக கொள்வோம். இக்கோடு வளை கோட்டினை J, K, M, N. எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இப்புள்ளிகளில் அலைவு நேரம் ஒரே சமமாகும்.

வரைபடத்தில் $JM = KN = L$. இது இணைமாற்று தனி ஊசலின் நீளத்திற்கு சமமாகும். வரைபடத்தில் $JR = l, RM = K^2/l$

$$JM = JR + RM = l + \frac{K^2}{l} = L$$

வரைபடத்திலிருந்து, இப்புள்ளிகட்கான அலைவு நேரம் காணலாம். $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{l^2}$$

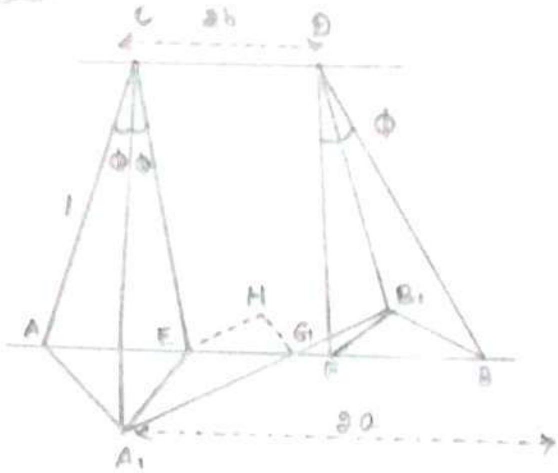
இதிலிருந்து g ன் மதிப்பு கணக்கிடலாம்.

தொடுகோடு OP வளைகோட்டில், அலைவு நேரம் சிறுமமாக உள்ள புள்ளிகளைத் தொடுகிறது. $K^2/l = l$ ஆக இருக்கும் போது அலைவு நேரம் சிறுமமாகும்.

$K^2 = l^2$ or $K = l$ ஆகவே. CO, CP ஆகிய இரு தூரங்களும் K க்கு

சமமாக இருக்கும் OP = 2K இதிலிருந்து மீள்சி ஆரம் கணக்கிடலாம். இதிலிருந்து g கணக்கிடலாம்.

ஈரிழை ஊசல்



AB என்ற திண்பொருள் இரு சமநீளம் கொண்ட இணையற்ற நூல்கள் CA, DB ஆல் கட்டி தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. படத்தில் A, B என்ற புள்ளிகள் புவி ஈர்ப்பு மையம் G லிருந்து சம தொலைவில் உள்ளது. AB = 2a எனவும், CD = 2b எனவும் கொள்வோம். AB சிறிது இடப்பெயர்ச்சி அடையச் செய்து, அலைவுறச் செய்யலாம். அதாவது ஒரு நேரம் t-ல் AB-ன் நிலை A_1B_1 எனக் கொள்வோம்.

இப்போது கோண இடப்பெயர்ச்சி $\angle AGA_1 = \theta$ எனக் கொள்வோம். இது மிகக் குறைவாகும்.

$\therefore AG = A_1G, \ \angle GAA_1 = \angle GA_1A = 90$ ..

θ மிக குறைவாக இருப்பதால் AEA_1 ஐ ஒரு முக்கோணமாகக் கொள்ளலாம்.

$$A_1E' = AE^2 + AA_1^2 - 2AE \times AA_1 \cos\left(90 - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= AE^2 + a^2\theta^2 - 2\,AB\,a\theta\frac{\theta}{2}$$

$$= AE^2 + a^2\theta^2 - AEa\theta^2$$

θ மிகக் குறைவாக இருப்பதால் θ^2 புறக்கணிக்கத்தக்கது.

$A_1E^2 = AE^2$ or $A_1E = AE$

ஆகவே $\angle A_1CE$ ϕ க்குச் சமமாகும்.

$AC = BD = l$ எனின் $\sin\phi = \dfrac{a-b}{l}$; $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{l^2-(a-b)^2}}{l}$

A_1C, B_1D நூல்களின் விறைப்பு, செங்குத்துடன் சமகோணம் ϕ சாய்ந்துள்ளது.

$2T\cos\phi = mg$.

மீட்சி கட்டையின் திருப்புத்திறன் $= T\sin\phi \times 2\,GH$

இங்கு H, A_1E நிலையில் ஒற்றும் $T\sin\theta$ கூறு, G லிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து கோட்டின் அடியாகும்.

$\angle GA_1E = \alpha$ என்றால் ΔGH_1H ல்

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a-b}{\sin\theta} \quad (\text{or}) \quad \sin\alpha = \frac{b\sin\theta}{(a-b)}$$

செங்கோண முக்கோணம் GHH_1 ல்

$GH = a\sin\alpha$

$$GH = \frac{ab}{a-b}\sin\theta$$

சமன்பாடு (3) லிருந்து GH ன் மதிப்பை சமன்பாடு (2) ல் பதிலீடு செய்ய

மீட்சி கட்டை திருப்புத்திறன்

$$= T\sin\phi \times \frac{2ab}{a-b}\sin\theta$$

$$T = \frac{mg}{2\cos\phi}$$

மீட்சி கட்டைத் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{mg}{2\cos\phi}\sin\phi\,\frac{2ab}{(a-b)}\sin\phi$$

மீட்சி கட்டை திருப்புத்திறன் $= \dfrac{mg}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{l^2-(a-b)}}\,\dfrac{a-b}{l}\,\dfrac{2ab}{(a-b)}\sin\theta$

$$\frac{mg\,ab}{\sqrt{l^2-(a-b)}}\sin\theta$$

மீட்சி கட்டையின் திருப்புத்திறன் $= \dfrac{mg\,ab}{\sqrt{l^2-(a-b)}}\,\theta$.

பொருளின் கோண முடுக்கம் $d^2\theta/dt^2$ எனவும் பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையம் வழியாக செல்லும் அச்சை பற்றிய நிலைத் திருப்புத்திறன் I எனவும் கொண்டால்.

மீட்டு இரட்டை $= I \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$I \frac{d^2\theta}{dt} = -\frac{mgab}{\sqrt{l^2-(a-b)}}\,\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgab}{I\sqrt{l^2-(a-b)}}\,\theta$$

$\dfrac{mgab}{I\sqrt{l^2-(a-b)}}$ ஒரு மாறிலி.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \propto \theta$$

பொருளின் முடுக்கமானது, கோண இடப்பெயர்ச்சிக்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளது. ஆகவே இவ்வியக்கம் சீரிசை இயக்கமாகும்.

அலைவு நேரம் $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\text{மாறிலி}}}$

$$T = 2\pi \frac{I\sqrt{l^2(a-b)}}{mgab}$$

$$\text{மாறிலி} = \frac{mgab}{I\sqrt{l^2-(a-b)}}$$

a, b ஏறத்தாழ சமமாக இருப்பதால் (a-b) புறக்கணிக்கத்தக்கது.

$T = 2\pi \dfrac{Il}{mgab}$ நூல்கள் இணையாக இருந்தால் $a=b$

$$T = 2\pi \frac{Il}{mga^2}$$

ஆகவே அலைவு நேரமும் நிலைமத்திருப்புத்திறனும் தெரிந்தால் θ கணக்கிடலாம்.

UNIT - III

உராய்வு [Friction]

▶ இரு பொருட்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் போது, அவைகளுக்கிடையே ஒரு விசை செயல்படுகிறது. இவ்விசையானது ஒரு பொருள் மற்றதன் மேல் நகர்வதற்குத் தடையாக அமைகிறது. இவ்வகையான விசையை உராய்வு விசை என்பர். உராய்வு நமது அன்றாட வாழ்வில் முக்கிய பங்கு பெறுகிறது.

▶ உராய்வு விசை இல்லாவிடில் நம்மால் எந்த வேலையும் செய்ய முடியாது.

நிலையியல், இயக்கவியல், வரம்பு உராய்வு :-

- ஒரு பொருள் மற்றதன் மேல் சமநிலையில் இருக்கும் போது தோன்றுகின்ற உராய்வு விசையானது அப்பொருளை சமநிலையில் அமைப்பதற்கு தேவையான அளவாகிறது.
- ஒரு பொருள் மற்றொன்றின் மேல் நகருகின்ற நிலையில் இருக்கும் போது தோன்றுகின்ற உராய்வு பெரும் மதிப்பை அடைகிறது.
- ஒரு பொருளானது மற்றதன் மேல் நகரும்போது தோன்றுகின்ற உராய்வினை "இயக்கவியல்" உராய்வு என்பர்.

உராய்வு விதிகள் [Laws of friction]

- இரு பொருட்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் போது இரண்டிற்குமிடையே தோன்றுகின்ற உராய்வு விசையின் செயல்படு திசையானது பொருள் எந்த திசையில் நகர முயலுகிறதோ எதிர்த்திசையில் அமையும்.

- ஒரு பொருளின் ஒன்றின் மேல் ஒன்று சமநிலையில் இருக்கும் போது தோன்றுகின்ற உராய்வு விசையின் அளவினை நழுவிடாமல் தடுக்கும் அளவான இருக்கும்.

- வரம்பு உராய்வு விசைக்கும் செங்குத்து எதிர்விசைக்கும் உள்ள விகிதம் ஒரு மாறிலியாகும். இதனை μ எனும் எழுத்தால் குறிப்பர். μ - ன் மதிப்பு பொருளின் தன்மையைச் சார்ந்தது.

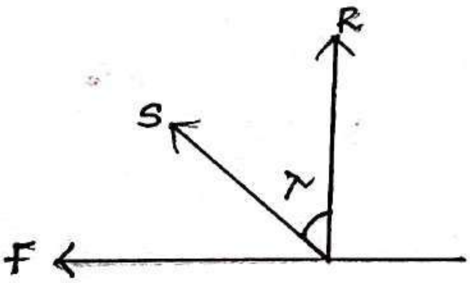
- செங்குத்து எதிர்விசை மாறாமல் இருக்கும் போது வரம்பு உராய்வு விசை பொருளின் அளவு, உருவம் ஆகியவற்றைப் பொறுத்திருப்பதில்லை.

- இயக்கவியல் உராய்வு விதி ;- ஒரு பொருள் மற்றதன் மேல் நகரும் போது இரு பொருள்களுக்கிடையே உராய்வு விசை தோன்றி இயக்கத்தை எதிர்க்கிறது.

உராய்வு கூம்பும் , உராய்வு கோணமும் ;-

- ஒரு பொருளானது மற்றொரு பொருளின் மீது நகரும் நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

- வரம்பு உராய்வு விசை F(2) செங்குத்து எதிர்விசை R. இவ்விரு விசைகளை ஒரு ஒற்றை விசையாகத் தொகுக்கலாம். இந்த விசை S ஆகும்.



$$\tan \lambda = \frac{F}{R}$$

ஆனால் $\frac{F}{R} = \mu$

$$\tan \lambda = \mu .$$

$$S^2 = F^2 + R^2$$

$$S = \sqrt{F^2 + R^2}$$

▶ உராய்வு விசையின் பெரும மதிப்பு $F = \mu R$ எனும்போது எதிர்விசை நேர்குத்து விசையுடன் அமைக்கும் கோணம்

$$\lambda = \tan^{-1}\mu$$

<u>சொரசொரப்பான சாய்தளம் ஒன்றில் மேலும், கீழும் நோக்கிய இயக்கம்</u>

a. <u>சமநிலையில் உள்ள பொருள்</u> :-

W எடை கொண்ட பொருள் ஒன்று, சாய்தளம் ஒன்றில் வைக்கப் பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

▶ பொருளின் எடை W செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயற்படுகிறது.

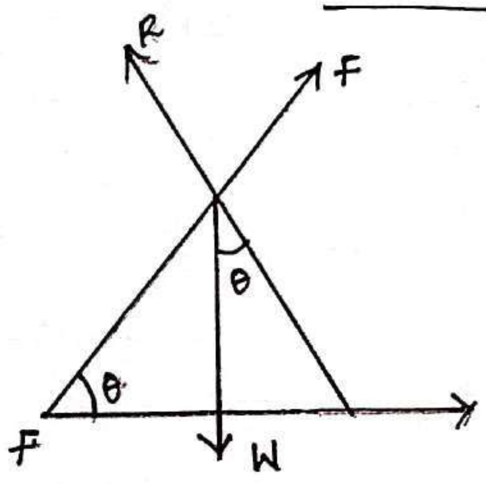
▶ உராய்வு விசை சாய்தளம் வழியாக மேல்நோக்கிச் செயற்படுகிறது.

▶ நேர்குத்து விசை R தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படுகிறது.

$$F = W \sin\theta \qquad \text{—— (1)}$$

$$R = W \cos\theta \qquad \text{—— (2)}$$

$$F/R = \tan\theta \qquad \text{—— (3)}$$

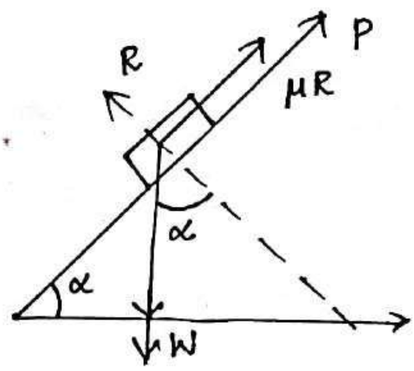


$$F/R = \tan\lambda = \mu$$

தளத்திற்கு இணையான விசை செயல்படும்போது பொருளின் சமநிலை

▶ ஒரு பொருளானது ஒரு சாய்தளத்தில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

▶ சாய்தளம் கிடைமட்டத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் α எனவும் பொருளின் எடை W எனவும் செங்குத்து எதிர் விசை R.



▶ வரம்பு உராய்வு விசை $= \mu R$ பொருளை சமநிலையில் இருக்கச் செய்வதற்குத் தேவையான விசை P எனக் கொள்வோம்.

பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகள்:

▶ பொருளின் எடை கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது

▶ செங்குத்து எதிர்விசை R தளத்திற்குச் செங்குத்து திசையில் செயல்படுகிறது.

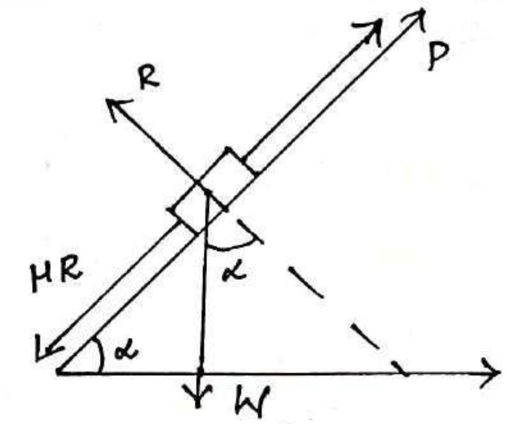
$$P + \mu R = W\sin\alpha \qquad \text{---(1)}$$

$$R = W\cos\alpha \qquad \text{---(2)}$$

$$P = W\sin\alpha - \mu W\cos\alpha \qquad \text{---(3)}$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda} \qquad \text{----(4)}$$

$$P_1 = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda}$$



▶ பொருளானது மேல் நோக்கி நகரும் நிலையில் இருப்பதாகக் கருதுவோம்.

▶ வரம்பு உராய்வு விசை கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் பொருளை சமநிலையில் இருப்பதற்குப் பயன்படுத்த வேண்டிய விசை P ஆகும்.

$$P - \mu R = W \sin\alpha$$

$$R = W \cos\alpha$$

$$= \frac{W(\sin\alpha \cdot \cos\lambda + \sin\lambda \cos\alpha)}{\cos\lambda}$$

$$P_2 = \frac{W \sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda} \qquad \text{—— (10)}$$

$P > P_2$ எனில் பொருள் மேல் நோக்கி நகரும். சமநிலைக்கும் p-க்கும் மதிப்பானது

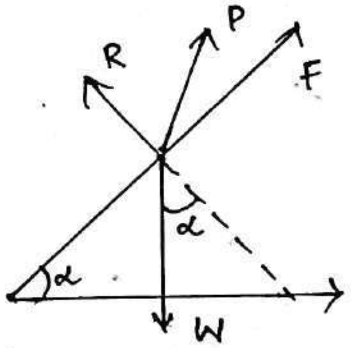
$$\frac{W \sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda} \text{ க்கும் } \frac{W \sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda} \text{ க்கும்.}$$

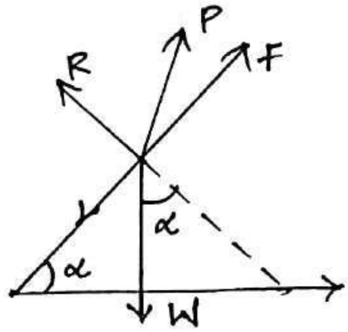
இடைப்பட்டதாக இருக்கும்.

C. விசையானது ஒரு திசையில் செயல்படும்போது பொருளின் சமநிலை

▶ ஒரு பொருளானது சாய்தளத்தில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். சாய்தளமானது கிடைமட்டத்துடன் அமைக்கும் கோணம் α எனக் கொள்வோம்.

▶ இப்பொருளின் மீது ஒரு விசை செயல்படுகிறது. θ கோணம் சரிகிறது.





▶ பொருள் கீழ்நோக்கி நகரும் நிலையில் இருப்பதாகக் கருதுவோம். உராய்வு μR மேல் நோக்கி செயல்படும்.

$$P\cos\theta + \mu R = W\sin\alpha \qquad \text{——— (1)}$$

$$P\sin\theta + R = W\cos\alpha. \qquad \text{——— (2)}$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)} \qquad \text{——— (3)}$$

$$P_1 = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)} \qquad \text{——— (4)}$$

$$P\cos\theta - \mu R = W\sin\alpha \qquad \text{——— (5)}$$

$$P\sin\theta + R = W\cos\alpha \qquad \text{——— (6)}$$

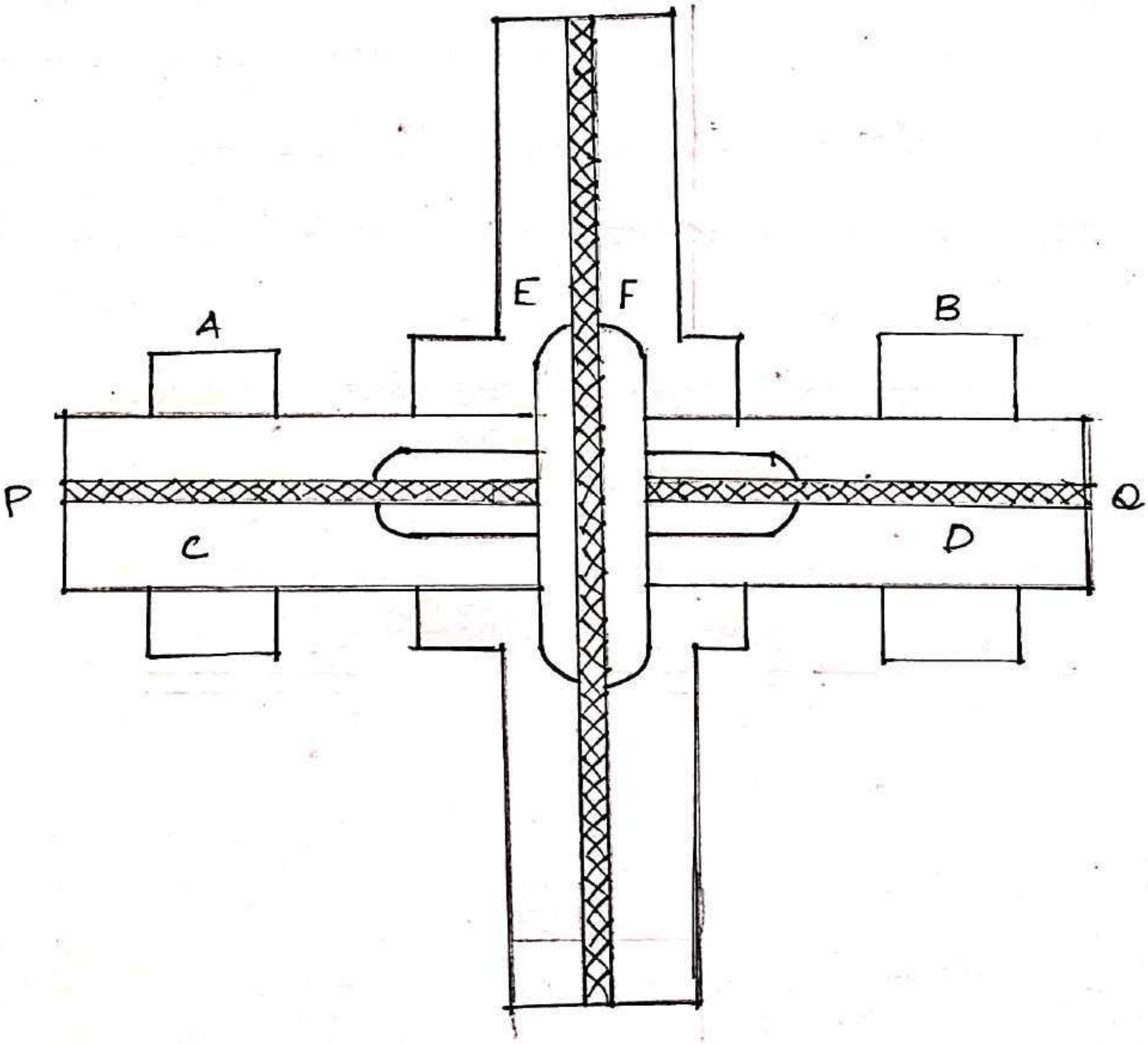
சிறப்பு நிலை

$$P_2 = \frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

$$\frac{W\sin(\alpha+\lambda}{\cos(\theta-\lambda)} \qquad \text{——— (8)}$$

உராய்வு கிளட்ச்;

- கிளட்ச் என்பது ஒரே அச்சில் இணைக்கப்பட்ட இரு தண்டுகளில் ஒரு தண்டின் சுழற்சி இயக்கத்தை மற்றொரு தண்டிற்கு மாற்றும் அமைப்பாகும்.
- சீராக ஏற்றம் என்னும் ஒரு சிறமான கிளட்ச்சில் ஒரு தண்டு மிக விரைவாகவும், மற்றொரு தண்டு நிலையாக குறைந்த வேகத்தினை இயக்கும் கிளட்ச் இயங்கும் போது விரைவாக இயங்கும் வேகம் அதிகரிக்கவும் செய்யும்.
- இவ்வகையான கிளட்ச் "உராய்வு கிளட்ச்" எனப்படும்.



- உராய்வு கிளட்ச்சின் செயல்பாட்டினை புரிந்து கொண்டு C மற்றும் D என்ற இரு தண்டினை எடுப்போம். அவைகள் A மற்றும் B என்ற பேரிங்குகள் மீது பொருத்தப்பட்டுள்ளது PQ என்ற போது அச்சைப் பொறுத்து சுழல்கின்றன.

- E மற்றும் என்ற இரு வட்டத் தட்டுகள் C மற்றும் D ன் முனைகளில் ஒன்றையொன்று நோக்கும்படி இணைக்கப் பட்டுள்ளன.

- வட்டத்தட்டு E உடைய தண்டு 'C' மிக விரைவாக இயங்குவதாகவும் வட்டத்தட்டு F உடைய தண்டு D நிலையானதாகவும் கொள்வோம்.

- இரு தண்டுகளும் அழுத்தப்படும்போது அவற்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள வட்டத் தட்டுகள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடுகின்றன.

- வட்டத்தட்டு E ன் வேகத்தை குறைக்கும்.

Books for study andreference

1. Dynamics – M. Narayanamurthi,N. Nagarathnam, The National Publishing Co. 2002
2. Statics, Hydrostatics and Hydrodynamics - M. Narayanamurthi,N. Nagarathnam, The National Publishing Co. 1990
3. Enthiravyil- Sundravelusamy, Priya Publicationns 2002