ALLIED MATHEMATICS FOR PHYSICS & CHEMISTRY

TITLE OF THE PAPER : CALCULUS AND VECTOR CALCULUS

PAPER CODE : 18KICH/PAM1

அலகு - I

அடுத்தடுத்த வகையீடு

y ஆனது x-ன் சார்பு எனில், y என்பதை x-ஐ பொறுத்து வகையிட இயலும் மற்றும் அவ்வகையீடு-களை y' (அ) y_1 (அ) $\frac{dy}{dx}$ என்று குறிக்கலாம்.

இங்கு y' (அ) y_1 (அ) $\frac{dy}{dx}$ என்பது முதல் வகையீடு.

y'' (அ) y_2 (அ) $\frac{d^2y}{dx^2}$ என்பது இரண்டாம் வகையீடு.

$\vdots$

y^n (அ) y_n (அ) $\frac{d^ny}{dx^n}$ என்பது n-ம் வகையீடு.

அடுத்தடுத்த வகையீடுகளின் குறியீடுகள்:

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx} = Dy$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

$y = f(x)$ எனில் அடுத்தடுத்த வகையீடுகள் என்பவை

$f'(x), f''(x), \ldots, f^n(x)$ (அல்லது)

$y', y'', y''', \ldots, y^n$ (அல்லது)

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ ஆகும்.

n-ம் வகைக்கெழு

$y = e^{ax}$, எனில் $\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2e^{ax}$; . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^ne^{ax}.$$

அடிப்படை தேற்றங்கள்

1. $y = (ax+b)^m$ எனில்

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = m(ax+b)^{m-1}\cdot(a) = (a)(m)(ax+b)^{m-1}$$

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = (a)(m)(m-1)(ax+b)^{m-2}(a) = (a^2)(m)(m-1)(ax+b)^{m-2}$$

$$y_3 = \frac{d^3y}{dx^3} = (a^2)(m)(m-1)(m-2)(ax+b)^{m-3}\cdot(a)$$

$$y_3 = (a^3)(m)(m-1)(m-2)(ax+b)^{m-3}.$$

$$\vdots$$

$$y_n = (a^n)(m)(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)(ax+b)^{m-n}.$$

2. $\log(ax+b)$-ன் n-ம் வகைக்கெழுவைக் காண்க

தீர்வு:

$y = \log(ax+b)$ எனில்

$$y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\{\log(ax+b)\} = \frac{1}{ax+b}(a) = a(ax+b)^{-1}.$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\{a(ax+b)^{-1}\} = a\frac{d}{dx}\{(ax+b)^{-1}\} = a(ax+b)^{-2}(-a)$$

$$y_2 = (-a^2)(ax+b)^{-2}.$$

$$y_n = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\{\log(ax+b)\} = D^n\{\log(ax+b)\} = (D^{n-1})(D\{\log(ax+b)\})$$

$$= D^{n-1}\left\{\frac{d}{dx}[\log(ax+b)]\right\} = D^{n-1}\left\{\frac{1}{ax+b}(a)\right\} = D^{n-1}\{(a)(ax+b)^{-1}\}$$

$$= (a)D^{n-1}\{(ax+b)^{-1}\} = (a)\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^{n-1}}{(ax+b)^n}$$

$$\therefore y_n \quad D^n\{\log(ax+b)\} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,(a^n)}{(ax+b)^n}.$$

$\frac{1}{ax+b}$ ன் n-ம் வகைக்கெழுவைக் காண்க

தீர்வு:

$$y = \frac{1}{ax+b} = (ax+b)^{-1}$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{(ax+b)^{-1}\right\} = (-1)(ax+b)^{-2}(a)$$

$$y_1 = (-a)(ax+b)^{-2}(a).$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\left\{(-1)(ax+b)^{-2}(a)\right\}$$

$$y_2 = (-1)(-2)(ax+b)^{-3}(a^2)$$

$$y_3 = \frac{d}{dx}(y_2) = \frac{d}{dx}\left\{(-1)(-2)(ax+b)^{-3}(a^2)\right\}$$

$$y_3 = (-1)(-2)(-3)(ax+b)^{-4}(a^3).$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y_n = \frac{d}{dx}(y_{n-1}) = \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(ax+b)^{-(n+1)}(a^n)$$

$$y_n = (-1)(-2)(-3)\cdots\cdots(-n)(ax+b)^{-(n+1)}(a^n)$$

$$y_n = (-1)^n(1)(2)(3)\cdots\cdots(n)(ax+b)^{-(n+1)}(a^n)$$

$$y_n = D^n(y) = D^n\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-1)^n(n!)(a^n)}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$y = \sin(ax+b)$ எனில் y_n கண்டுபிடி

தீர்வு: $y = \sin(ax+b)$

$$y_1 = \frac{d}{dx}(\sin(ax+b)) = \cos(ax+b)(a)$$

$$y_1 = (a)\cos(ax+b) = (a)\sin(ax+b+\pi/2)$$

$$y_1 = (a)\sin(ax+b+\pi/2).$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}\left\{(a)\sin(ax+b+\pi/2)\right\} = (a)\frac{d}{dx}\left\{\sin(ax+b+\pi/2)\right\}$$

$$= (a)\cos(ax+b+\pi/2)(a) = (a^2)\cos(ax+b+\pi/2).$$

$$y_2 = (a^2)\sin(ax+b+\pi/2+\pi/2)$$

$$\therefore\ y_2 = (a^2)\sin(ax+b+2\pi/2).$$

இதுபோல $y_3 = a^3\sin(ax+b+3\pi/2)$

$$\vdots$$

$$y_n = a^n\sin(ax+b+n\pi/2).$$

$e^{ax}\sin(bx+c)$ ன் n-ம் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு:

$$y = e^{ax}\sin(bx+c).$$

$$y_1 = \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\{e^{ax}\sin(bx+c)\}$$

$$= (a)(e^{ax})\sin(bx+c) + (e^{ax})(b)(\cos(bx+c))$$

$$y_1 = ae^{ax}\sin(bx+c) + be^{ax}\cos(bx+c) \longrightarrow (1).$$

$a = r\cos\alpha$ and $b = r\sin\alpha$ எனக் கொள்க

$$a^2+b^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = r^2(1) = r^2.$$

$$a^2+b^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2} = (a^2+b^2)^{1/2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha} = \tan\alpha;\ \frac{b}{a} = \tan\alpha. \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(b/a).$$

பிரதியிடுக $a = r\cos\alpha$ and $b = r\sin\alpha$ in (1).

$$(1) \Rightarrow y_1 = e^{ax}(a\sin(bx+c) + b\cos(bx+c))$$

$$= e^{ax}\{(r\cos\alpha)\sin(bx+c) + (r\sin\alpha)\cos(bx+c)\}$$

$$= (e^{ax})(r)\{(\cos\alpha)\sin(bx+c) + (\sin\alpha)\cos(bx+c)\}$$

$$\therefore y_1 = r e^{ax}\sin(bx+c+\alpha) \longrightarrow (2).$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) = \frac{d}{dx}\{r(e^{ax})\sin(bx+c+\alpha)\}$$

$$= (r)\frac{d}{dx}\{(e^{ax})\sin(bx+c+\alpha)\}.$$

$$= r\{(a\,e^{ax})\sin(bx+c+\alpha) + (e^{ax})(b)\cos(bx+c+\alpha)\}$$

$$= (r.e^{ax})\{a\sin(bx+c+\alpha) + b\cos(bx+c+\alpha)\}.$$

$$= (r\,e^{ax})\{(r\cos\alpha)\sin(bx+c+\alpha) + (r\sin\alpha)\cos(bx+c+\alpha)\}$$

$$= r^2.e^{ax}\{(\cos\alpha)\sin(bx+c+\alpha) + (\sin\alpha)\cos(bx+c+\alpha)\}$$

$$y_2 = r^2.e^{ax}.\sin(bx+c+2\alpha) \longrightarrow (3).$$

$\vdots$

$$y_n = \frac{d^ny}{dx^n} = (r^n)(e^{ax})\sin(bx+c+n\alpha) \longrightarrow (4).$$

பிரதியிடுக $r = (a^2+b^2)^{1/2}$ and $\alpha = \tan^{-1}(b/a)$ in (4).

$$y_n = \{(a^2+b^2)^{1/2}\}^n.(e^{ax})\sin(bx+c+n.\tan^{-1}(b/a)).$$

$$= (a^2+b^2)^{n/2}(e^{ax})\sin(bx+c+n.\tan^{-1}(b/a)).$$

$$y_n = (e^{ax})(a^2+b^2)^{n/2}\sin(bx+c+n.\phi)$$

இதுபோல, $D^n\{e^{ax}\cos(bx+c)\} = r^n e^{ax}\cos(bx+c+n.\phi)$

இங்கு $r = (a^2+b^2)^{1/2}$ & $\phi = \tan^{-1}(b/a)$.

* $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}$ எனில் y_n காண்க

தீர்வு: $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}$

பகுதி பின்னங்களாக மாற்றிக் கொள்வோம்.

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)}$$

$A = 5/9$, $B = 1/3$; $C = 4/9$.

$$\therefore y = \frac{5/9}{(x-1)} + \frac{1/3}{(x-1)^2} + \frac{4/9}{(x+2)}$$

$$y = \frac{5}{9}(x-1)^{-1} + \frac{1}{3}(x-1)^{-2} + \frac{4}{9}(x+2)^{-1}$$

$$y_n = D^n\left\{\frac{5}{9}(x-1)^{-1}\right\} + D^n\left\{\frac{1}{3}(x-1)^{-2}\right\} + D^n\left\{\frac{4}{9}(x+2)^{-1}\right\}$$

$$= \left(\frac{5}{9}\right)\frac{n!(-1)^n}{(x-1)^{n+1}} + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{(n+1)!(-1)^n}{(x-1)^{n+2}} + \left(\frac{4}{9}\right)\frac{n!(-1)^n}{(x+2)^{n+1}}$$

$$\therefore y_n = (-1)^n(n!)\left\{\frac{5/9}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1/3(n+1)}{(x-1)^{n+2}} + \frac{4/9}{(x+2)^{n+1}}\right\}$$

* $y = \dfrac{1}{x^2+a^2}$ எனில் y_n காண்க

தீர்வு: $y = \dfrac{1}{x^2+a^2} \rightarrow y = \dfrac{1}{2ai}\left\{\dfrac{1}{x-ai} - \dfrac{1}{x+ai}\right\}$

$$y = \frac{1}{2ai}\left\{(x-ai)^{-1} - (x+ai)^{-1}\right\}$$

வகையீட்டு சூத்திரத்தின் படி $D^n(ax+b)^{-1} = \dfrac{(-1)^n(n!)a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

$$y_n = D^n\left\{\left(\frac{1}{2ai}\right)\left(\frac{1}{x-ai} - \frac{1}{x+ai}\right)\right\} = D^n\left\{\frac{1}{2ai}\left((x-ai)^{-1} - (x+ai)^{-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2ai}\left\{\frac{(-1)^n(n!)}{(x-ai)^{n+1}} - \frac{(-1)^n(n!)}{(x+ai)^{n+1}}\right\}$$

$$\therefore y_n = \frac{(-1)^n(n!)}{2ai}\left\{\frac{1}{(x-ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right\}$$

* $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ எனில் $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு: $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin(\log x)}{x} + \frac{b\cos(\log x)}{x} \longrightarrow (1).$$

①-ஐ இருபுறமும் x-ஆல் பெருக்க

$$x\frac{dy}{dx} = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x) \longrightarrow ②$$

②-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொருத்து வகையிடவும்

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{-a\cos(\log x)}{x} - \frac{b\sin(\log x)}{x}$$

இருபுறமும் x-ஆல் பெருக்கவும்

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -a\cos(\log x) - b\sin(\log x)$$

$$\text{(ie)}\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -(a\cos(\log x) + b\sin(\log x))$$

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -y \quad \therefore\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

* $\cos^5\theta\sin^7\theta$ ஐ n-ம் மடங்குகளின் விரிவைக் காண்க.

தீர்வு: $x = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta;\quad x - \frac{1}{x} = 2i\sin\theta$$

டி மாய்வரின் தேற்றத்தின் படி

$$x^n = \cos n\theta + i\sin n\theta;\quad \frac{1}{x^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta;\quad x^n - \frac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta$$

$$2^5\cos^5\theta = \left(x+\frac{1}{x}\right)^5 \text{ and } 2^7(i)^7\sin^7\theta = \left(x-\frac{1}{x}\right)^7$$

எனவே

$$(2^5\cos^5\theta)(2^7i^7\sin^7\theta) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^5\left(x-\frac{1}{x}\right)^7 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^5\left(x-\frac{1}{x}\right)^5\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^5\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x^{10}-5x^6+10x^2-\frac{10}{x^2}+\frac{5}{x^6}-\frac{1}{x^{10}}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)$$

$$= \left(x^{12}-\frac{1}{x^{12}}\right) - 2\left(x^{10}-\frac{1}{x^{10}}\right) - 4\left(x^8-\frac{1}{x^8}\right) + 10\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right) + 5\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right) - 20\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\therefore 2^{12}(i)^7\cos^5\theta\sin^7\theta$$

$$= 2i\sin 12\theta - 2(2i\sin 10\theta) - 4(2i\sin 8\theta) + 10(2i\sin 6\theta) + 5(2i\sin 4\theta) - 20(2i\sin 2\theta).$$

$$2^{12}(-i)\cos^5\theta\sin^7\theta$$

$$= 2i(\sin 12\theta - 2\sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 10\sin 6\theta + 5\sin 4\theta - 20\sin 2\theta)$$

$$\cos^5\theta\sin^7\theta = \frac{2i}{2^{12}(-i)}(\sin 12\theta - 2\sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 10\sin 6\theta + 5\sin 4\theta - 20\sin 2\theta)$$

$$= \frac{-1}{2^{11}}(\sin 12\theta - 2\sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 10\sin 6\theta + 5\sin 4\theta - 20\sin 2\theta)$$

$D^n(\cos^5\theta\sin^7\theta)$

$= D^n\left\{\frac{-1}{2^{11}}(\sin 12\theta - 2\sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 10\sin 6\theta + 5\sin 4\theta - 20\sin 2\theta)\right\}$

$= \left(\frac{-1}{2^{11}}\right)D^n\{\sin 12\theta - 2\sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 10\sin 6\theta + 5\sin 4\theta - 20\sin 2\theta\}$

$$\therefore D^n(\cos^5\theta\sin^7\theta) = \frac{-1}{2^{11}}\{12^n\sin(12\theta + n\pi/2) - (2)(10)^n\sin(10\theta + n\pi/2) - (4)(8)^n\sin(8\theta + n\pi/2) + (10)(6)^n\sin(6\theta + n\pi/2) + (5)(4)^n\sin(4\theta + n\pi/2) - (20)(2)^n\sin(2\theta + n\pi/2)\}$$

* $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$ என நிறுவுக

தீர்வு: $y = ae^{mx} + be^{-mx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ae^{mx} + be^{-mx})$

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{d}{dx}(e^{mx}) + b\frac{d}{dx}(e^{-mx}) = a\cdot m\cdot e^{mx} - b\cdot m\cdot e^{-mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = m(ae^{mx} - be^{-mx}) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = m\{a\cdot me^{mx} - b(-m)e^{-mx}\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\{a\cdot m\cdot e^{mx} + bme^{-mx}\} = m^2(ae^{mx} + be^{-mx}) = m^2y.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2y \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$$

* $y = \sin m(\sin^{-1}x)$ எனில் $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ என நிறுவுக

தீர்வு: $y = \sin(m\sin^{-1}x) \rightarrow \sin^{-1}(y) = m\sin^{-1}(x) \longrightarrow (1)$.

(1)-ஐ இருபுறமும் x-ஆல் வகையிடவும்.

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(y)) = \frac{d}{dx}(m\sin^{-1}(x)) = m\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{dy}{dx} = m\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow (2).$$

(ie) $\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx} = m\sqrt{1-y^2} \longrightarrow (3)$.

(3)-ஐ இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த $\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2(1-y^2) \rightarrow (4)$

(4)-ஐ இருபுறமும் x-ஆல் வகையிடவும்

$$(1-x^2)\left(2\cdot\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - (2x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (m^2)(-2y)\frac{dy}{dx}.$$

இருபுறமும் $2\frac{dy}{dx}$-ஆல் வகுக்கவும்

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = -m^2y.$$

(ie) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$

(ie) $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$.

n-ம் வகையீட்டுக்கான லைப்னிட்ஸின் தேற்றம்.

u மற்றும் v ஆனது x-ன் சார்பு எனில்

$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$; $D(uv) = v\cdot D(u) + u\, D(v)$.

$D^2(uv) = vD^2(u) + uD^2(v) + 2D(u)D(v)$

$D^3(uv) = vD^3(u) + 3D^2(u)D(v) + 3D(u)D^2(v) + uD^3(v)$.

பொதுவாக தொடர்ந்தால்படி.

$$D^n(uv) = v\cdot D^n(u) + nc_1 D^{n-1}(u)D(v) + nc_2 D^{n-2}(u)D^2(v) + nc_3 D^{n-3}(u)D^3(v) + \cdots + nc_r D^{n-r}(u)D^r(v) + u\cdot D^n(v).$$

* எடுத்துக்காட்டு

x^3e^{5x}-ன் n-ம் வகைக்கெழு காண்க

தீர்வு: Let $u = e^{5x}$; $v = x^3$.

$$D^n(e^{5x}x^3) = D^n(e^{5x})(x^3) + nc_1 D^{n-1}(e^{5x})D(x^3) + nc_2 D^{n-2}(e^{5x})D^2(x^3) + nc_3 D^{n-3}(e^{5x})D^3(x^3).$$

$$D^n(e^{5x}x^3) = (5^n)(e^{5x})(x^3) + nc_1 D^{n-1}(e^{5x})(3x^2) + (5^{n-2})(nc_2)(e^{5x})(6x) + (nc_3)(5^{n-3})(6).$$

* $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ எனில் $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$; $x^2y_{n+2} + x(2n+1)y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x) \longrightarrow ①$

①-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்

$y_1 = -a\sin(\log x)(1/x) + b\cos(\log x)(1/x)$

$xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x) \longrightarrow ②$.

②-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்.

$xy_2 + y_1 = -a\cos(\log x)(1/x) - b\sin(\log x)(1/x)$

$x(xy_2 + y_1) = -x\{a\cos(\log x)(1/x) + b\sin(\log x)(1/x)\}$

$x^2y_2 + xy_1 = -\{a\cos(\log x) + b\sin(\log x)\}$

$x^2y_2 + xy_1 = -y \Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0 \longrightarrow ③$.

லைப்னிட்ஸ் தேற்றத்தின் படி ③-ஐ n-ம் வகையிட்டு x-ஐ பொறுத்து காணும் போது

$D^n\{x^2y_2 + xy_1 + y\} = 0$

$D^n(x^2 y_2) + D^n(x y_1) + D^n(y) = 0.$

$D^n(y_2)(x^2) + nC_1 D^{n-1}(y_2) D(x^2) + nC_2 D^{n-2}(y_2) D^2(x^2)$
$+ D^n(y_1)(x) + nC_1 D^{n-1}(y_1) D(x) + D^n(y) = 0.$

$(y_{n+2})(x^2) + (n)(y_{n+1})(2x) + \frac{n(n-1)}{2}(y_n)(2)$
$+ (y_{n+1})(x) + (n)(y_n)(1) + y_n = 0.$

$x^2 y_{n+2} + (2xn) y_{n+1} + \frac{2(n^2-n)}{2} y_n + x y_{n+1} + n y_n + y_n = 0.$

$x^2 y_{n+2} + (2xn) y_{n+1} + (n^2-n) y_n + x y_{n+1} + n y_n + y_n = 0.$

$x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} + (n^2-n+n+1) y_n = 0.$

$x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0.$

$y = \sinh(m \sinh^{-1} x)$ எனில் $(1+x^2) y_{n+2} + x(2n+1) y_{n+1}$
$+ (n^2-m^2) y_n = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$y = \sinh(m \sinh^{-1} x) \Rightarrow \sinh^{-1}(y) = m \sinh^{-1}(x) \longrightarrow (1).$

(1)-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்

$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{dy}{dx} = m \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sqrt{1+x^2}\, \frac{dy}{dx} = m\sqrt{1+y^2}.$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த $(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2(1+y^2) \longrightarrow (2)$

(2)-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்.

$(1+x^2)\left(2\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (2x) = m^2 (2y)(y_1).$

$(1+x^2)(2y_1)(y_2) + (y_1)^2 (2x) = m^2 (2 y y_1) \longrightarrow (3)$

(3)-ஐ இருபுறமும் $2y_1$-ஆல் வகுக்கவும்.

$(1+x^2) y_2 + x y_1 = m^2 y \rightarrow (1+x^2) y_2 + x y_1 - m^2 y = 0 \longrightarrow (4)$

லைப்னிட்ஸ் தேற்றம் பயன்படுத்தி (4)-க்கு n-ம் வகையீட்டைக் காண்போம்.

$D^n\{(1+x^2) y_2 + x y_1 - m^2 y\} = 0.$

$D^n(y_2)(1+x^2) + nC_1 D^{n-1}(y_2) D(1+x^2) + nC_2 D^{n-2}(y_2) D^2(1+x^2)$

$D^n(y_1)(x) + nC_1 D^{n-1}(y_1) D(x) - D^n(m^2 y) = 0.$

$y_{n+2}(1+x^2) + (n)(y_{n+1})(2x) + \frac{n(n-1)}{2}(y_n)(2) + y_{n+1}(x)$
$+ n(y_n)(1) - m^2(y_n) = 0.$

$(1+x^2) y_{n+2} + (2xn) y_{n+1} + \frac{n^2-n}{2}(2) y_n + (x) y_{n+1}$
$+ n y_n - m^2 y_n = 0.$

$\therefore (1+x^2) y_{n+2} + (2n+1)(x) y_{n+1} + (n^2-n+n-m^2) y_n = 0.$

$(1+x^2) y_{n+2} + (2n+1)(x) y_{n+1} + (n^2-m^2) y_n = 0.$

$y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$ எனில் $(1+x^2)y_{n+2}+x(2n+1)y_{n+1}$

$(1+x^2)y_{n+2}+x(2n+1)y_{n+1}+(n^2-m^2)y_n=0$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$y=(x+\sqrt{1+x^2})^m \longrightarrow (1).$$

(1)-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்

$$y_1=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)\right)$$

$$=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\sqrt{1+x^2}\cdot y_1=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\sqrt{1+x^2}(y_1)=m(x+\sqrt{1+x^2})^m \Rightarrow \sqrt{1+x^2}(y_1)=my \longrightarrow (2).$$

(2)-ஐ இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தவும்

$$(1+x^2)(y_1)^2=m^2y^2 \rightarrow (1+x^2)(y_1^2)-m^2y^2=0 \longrightarrow (3).$$

(3)-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்.

$$(1+x^2)(2y_1)(y_2)+(y_1)^2(2x)-m^2(2y)(y_1)=0.$$

இருபுறமும் $2y_1$-ஆல் வகுக்கவும்.

$$(1+x^2)(y_2)+x(y_1)-m^2y=0 \longrightarrow (4).$$

(4)-ன் n-ம் வகையீட்டைக் கண்டறிய லெப்னிட்ஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தும் போது,

$$D^n\{(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y\}=0.$$

$$D^n(y_2)(1+x^2)+nC_1D^{n-1}(y_2)D(1+x^2)+nC_2D^{n-2}(y_2)D^2(1+x^2)$$
$$+D^n(y_1)(x)+nC_1D^{n-1}(y_1)D(x)-m^2D^n(y)=0.$$

$$(y_{n+2})(1+x^2)+(n)(y_{n+1})(2x)+\frac{n(n-1)}{2}(y_n)(2)$$
$$+(y_{n+1})(x)+(n)(y_n)(1)-m^2(y_n)=0.$$

$$(1+x^2)y_{n+2}+(2xn)y_{n+1}+\frac{(n^2-n)}{2}(2)y_n+(x)y_{n+1}$$
$$+n(y_n)-m^2(y_n)=0.$$

$$(1+x^2)y_{n+2}+(2xn+x)y_{n+1}+(n^2-n+n-m^2)y_n=0$$

$$(1+x^2)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2-m^2)y_n=0.$$

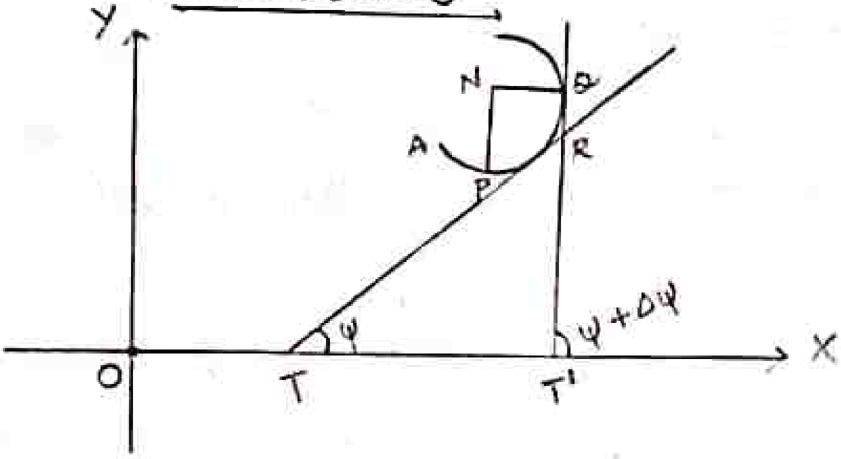
ALLIED MATHEMATICS FOR PHYSICS & CHEMISTRY MAJOR

TITLE OF THE PAPER : CALCULUS AND VECTOR CALCULUS

PAPER CODE : 18KICH/PAM1

அலகு - II

வளைவரை



வளைவரையின் மையம்:

P என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைவில் அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளி என்க. Q என்பது அதே வளைவில் உள்ள மற்றொரு புள்ளியாகும். P மற்றும் Q வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக் கோடுகள் N என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன. N எனும் புள்ளி C எனும் புள்ளியாக மாறுமானால் (P Q-ஆக மாறும் போது) C என்பது வளைவரை மையம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

வளைவரை:

ஒரு வளைவில் P எனும் புள்ளியின் வளைவரை ஆனது CP எனும் நேர்கோட்டின் நீளம் ஆகும்.

வளைவரையின் ஆரம்:

ஒரு வளைவில் P எனும் புள்ளியினுடைய வளைவரையின் ஆரம் என்பது CP-ன் நீளமாகும். வளைவரையின் ஆரத்தின் குறியீடு ρ என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு -1

$s = a\tan\psi$ எனும் சமன்பாட்டினைக் கொண்ட சங்கிலி வளைவின் வளைவரையின் ஆரம் (ρ) காண்க.

தீர்வு

$$s = a\tan\psi$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{d}{d\psi}(a\tan\psi)$$

$$\rho = a\sec^2\psi$$

எடுத்துக்காட்டு -2

$s = 4a\sin\psi$ எனும் வட்டப்புள்ளி வளைவு வளைவின் (ρ) வளைவரையின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு:

$$s = 4a\sin\psi$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{d}{d\psi}(4a\sin\psi).$$

$$\rho = 4a\cos\psi$$

வளைவரையின் ஆரத்திற்கான கார்டீசியன் சூத்திரம்:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\psi.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2\psi\cdot\frac{d\psi}{dx} = \sec^2\psi\,\frac{d\psi}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}$$

$$\frac{ds}{d\psi} = \frac{\sec^3\psi}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad as \quad \frac{dx}{ds} = \cos\psi$$

$$= \frac{(1+\tan^2\psi)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\frac{ds}{d\psi} = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 6

$x^4+y^4=2$ என்ற வளைவில் $(1,1)$ என்னும் புள்ளியில் வளைவரையின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு

$$x^4+y^4=2 \longrightarrow (1).$$

(1)-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்

$$4x^3+4y^3\frac{dy}{dx}=0.$$

$$x^3+y^3\frac{dy}{dx}=0.$$

$$y^3\frac{dy}{dx}=-x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x^3}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-x^3)(3y^2)\frac{dy}{dx}+y^3(3x^2)}{y^6}$$

$$=\frac{-3x^3y^2\frac{dy}{dx}+3x^2y^3}{y^6}=\frac{3x^2y^2\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)}{y^6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3x^2y-3x^3\,dy/dx}{y^4}$$

$(1,1)$ என்னும் புள்ளியில் $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=\frac{-x^3}{y^3}=\frac{-1}{1}=-1.$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(1,1)}=\frac{3(1)(1)-3(1)(-1)}{(1)}=\frac{3+3}{1}=6.$$

$$\rho=\frac{\left\{1+(dy/dx)^2\right\}^{3/2}}{d^2y/dx^2} \Rightarrow \rho_{(1,1)}=\frac{(1+(-1)^2)^{3/2}}{6}=\frac{2^{3/2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{6}$$

$$\boxed{\rho=\sqrt{2}/3}$$

4 (0,c) என்னும் புள்ளியில் $y = c\cosh x/c$ யின் ρ காண்க.

தீர்வு : (4)

$$y = c\cosh(x/c)$$

$$\frac{dy}{dx} = c\cdot\sinh(x/c)\cdot\frac{1}{c} = \sinh(x/c).$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,c)} = \sinh(0/c) = \sinh(0) = 0.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cosh(x/c)\,\frac{1}{c}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(0,c)} = \cosh(0/c)(1/c) = \frac{1}{c}\cosh(0)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(0,c)} = \frac{1}{c}.$$

$$\rho = \frac{\left\{1+(dy/dx)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\rho_{(0,c)} = \frac{(1+0)^{3/2}}{1/c} = \frac{1}{1/c} = c.$$

$$\boxed{\rho_{(0,c)} = c}$$

5 $y = c\cosh x/c$ எனும் சங்கிலியத்தின் வளைவரையின் ஆரமானது, வளைவு மற்றும் X-ன் அச்சுக்கும் இடையே உள்ள இடைமறிப்பு குத்துக்கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள பகுதியின் நீளத்திற்குச் சமமானது என நிரூபித்துக் காட்டு.

தீர்வு :

$$y = c\cosh(x/c) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (c)\sinh(x/c)(1/c)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(x/c) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \cosh(x/c)(1/c)$$

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\{1+(\sinh x/c)^2\}^{3/2}}{(1/c)\cosh(x/c)}$$

$$= \frac{\{1+\sinh^2(x/c)\}^{3/2}}{(1/c)\cosh(x/c)} = \frac{(\cosh^2(x/c))^{3/2}}{1/c \cosh x/c}$$

$$= \frac{\cosh^3 x/c}{\cosh x/c}(c) = c\,co$$

$$= c\cosh^2(x/c)$$

$$\rho = y^2/c$$

(x,y) என்னும் புள்ளியில் இந்தக் கோடானது

$$= y\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2} = y\cosh x/c = y^2/c$$

6. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ என்னும் வளைவுக்கான வளைவரையின் ஆரத்தினை $(1/4, 1/4)$ என்னும் புள்ளியில் காண்க.

தீர்வு :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \longrightarrow (1)$$

(1)-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1/4,1/4)} = -\sqrt{\frac{1/4}{1/4}} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\frac{dy}{dx} + \sqrt{y}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}(dy/dx)}{x}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(1/4,\,1/2)} = \frac{\frac{\sqrt{1/4}}{2\sqrt{1/4}} - \frac{\sqrt{1/4}}{2\sqrt{1/4}}(-1)}{1/4} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1/4}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(1/4,\,1/4)} = \frac{1}{1/4} = 4.$$

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\rho_{(1/4,\,1/4)} = \frac{\left\{1 + (-1)^2\right\}^{3/2}}{4} = \frac{2^{3/2}}{4}$$

$$= \frac{2^1 \cdot 2^{1/2}}{2^2} = \frac{2^{1/2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rho_{(1/2,\,1/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. $xy^2 = a^3 - x^3$ என்னும் அரைமுக்கான வளைவரையின் ஆரத்தினை $(a,0)$ என்னும் புள்ளியில் காண்க.

தீர்வு :

$$xy^2 = a^3 - x^3 \longrightarrow (1)$$

(1)-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்

$$(x)(2y)\frac{dy}{dx} + y^2(1) = -3x^2$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = -3x^2$$

$$2xy\frac{dy}{dx} = -3x^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2+y^2)}{2xy}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,0)} = \frac{-(3a^2+0)}{0} = \infty$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(a,0)} = \infty$$

$\therefore$ ρ-வின் சூத்திரம் ஆனது, $\dfrac{\left\{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2xy}{3x^2+y^2} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)_{(a,0)} = \frac{-2(a)(0)}{3a^2+0}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(a,0)} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(3x^2+y^2)\left(-2\left(x+y\frac{dx}{dy}\right)\right) + 2xy\left(6x\frac{dx}{dy}+2y\right)}{(3x^2+y^2)^2}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{(a,0)} = \frac{-(3a^2+0)(2)(a+0)+2(0)(0)}{(3a^2)^2} = \frac{-(3a^2)(a)(2)}{9a^4}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{(a,0)} = \frac{-6a^3}{9a^4} = \frac{-2}{3a}$$

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

$$\rho_{(a,0)} = \frac{(1+0)^{3/2}}{-2/3a} = \frac{-1}{2/3a}$$

$$\therefore \boxed{\rho_{(a,0)} = \frac{-3a}{2}} \Rightarrow \rho = \frac{3a}{2}.$$

8. $x^3+y^3=3axy$ என்னும் வளைவரையின் வளைவு ஆரத்தினை (ρ) $(3a/2, 3a/2)$ புள்ளியில் காண்க.

தீர்வு

$$x^3+y^3=3axy \longrightarrow (1).$$

(1)-ஐ இருபுறமும் x-ஐ பொறுத்து வகையிடவும்.

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx} = 3ay+3ax\frac{dy}{dx}.$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 3ax\frac{dy}{dx} = 3ay-3x^2.$$

$$3\frac{dy}{dx}(y^2-ax) = 3(ay-x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3a/2,3a/2)} = \frac{a(3a/2)-(3a/2)^2}{(3a/2)^2-a(3a/2)}$$

$$= \frac{3a^2/2 - 9a^2/4}{9a^2/4 - 3a^2/2}$$

$$= \frac{(12a^2-9a^2)/4}{(9a^2-12a^2)/4} = \frac{3a^2}{-3a^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3a/2,3a/2)} = -1.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y^2-ax)(a\frac{dy}{dx}-2x)-(ay-x^2)(2y\frac{dy}{dx}-a)}{(y^2-ax)^2}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(3a/2,3a/2)} = \frac{((3a/2)^2-a(3a/2))(a(-1)-2(3a/2))-(a(3a/2)-(3a/2)^2)\cdot(2(3a/2)(-1)-a)}{((3a/2)^2-a(3a/2))^2}$$

$$= \frac{(9a^2/4-3a^2/2)(-a-3a)-(3a^2/2-9a^2/4)(-3a-a)}{(9a^2/4-3a^2/2)^2}$$

$$= \frac{(9a^2/4-6a^2/4)(-4a)-(6a^2/4-9a^2/4)(-4a)}{\left(\frac{9a^2}{4}-\frac{6a^2}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{(3a^2/4)(-4a)-(-3a^2/4)(-4a)}{\left(\frac{3a^2}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{-3a^3-3a^3}{\frac{9a^4}{16}} = \frac{-6a^3}{\frac{9a^4}{16}} = -6a^3 \times \frac{16}{9a^4}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(3a/2,3a/2)} = \frac{-32a^3}{3a^4} = \frac{-32}{3a}$$

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \Rightarrow \rho_{(3a/2,3a/2)} = \frac{(1+(-1)^2)^{3/2}}{-32/3a}$$

$$= \frac{2^{3/2}}{-32/3a} = \frac{2\cdot 2^{1/2}}{-32/3a} = 2\cdot 2^{1/2} \times \frac{-3a}{32}$$

$$= \frac{-(2^{1/2})(3a)}{16} = \frac{-(3a)\sqrt{2}}{16}$$

$$\therefore \rho = \frac{(3a)\sqrt{2}}{16}.$$

அளவுரு அச்சுகளில் வளைவுக்கோட்டின் ஆரம்

$$x = f(t) \quad , \quad y = \phi(t).$$

$$\frac{dx}{dt} = f'(t), \quad \frac{dy}{dt} = \phi'(t).$$

$$\therefore \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\phi'(t)}{f'(t)}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi'(t)}{f'(t)}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)\cdot\phi''(t) - \phi'(t)\cdot f''(t)}{(f'(t))^2} \cdot \frac{1}{f'(t)}$$

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{\left\{1 + \left(\frac{\phi'(t)}{f'(t)}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{f'(t)\cdot\phi''(t) - \phi'(t)\cdot f''(t)}{(f'(t))^3}} = \frac{\left\{1 + \frac{(\phi'(t))^2}{(f'(t))^2}\right\}^{3/2}}{\frac{f'(t)\phi''(t) - \phi'(t)\cdot f''(t)}{(f'(t))^3}}$$

$$= \frac{\left\{\frac{(f'(t))^2 + (\phi'(t))^2}{(f'(t))^2}\right\}^{3/2}}{\frac{f'(t)\phi''(t) - \phi'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}} = \frac{\frac{\{(f'(t))^2 + (\phi'(t))^2\}^{3/2}}{(f'(t)^2)^{3/2}}}{\frac{f'(t)\phi''(t) - \phi'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}}$$

$$= \frac{\frac{((f'(t))^2 + (\phi'(t))^2)^{3/2}}{(f'(t))^3}}{\frac{f'(t)\phi''(t) - \phi'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}}$$

$$\rho = \frac{(f'(t)^2 + \phi'(t)^2)^{3/2}}{f'(t)\phi''(t) - \phi'(t)f''(t)} \Rightarrow \rho = \frac{(f'^2 + \phi'^2)^{3/2}}{f'\cdot\phi'' - \phi'\cdot f''}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f'\cdot\phi'' - \phi'\cdot f''}{(f'^2 + \phi'^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

10 $x = a(\theta + \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$ என்னும் வட்டப்புள்ளி நேர்வளையின் வளைவரையின் ஆரமானது எந்த புள்ளியிலும் $4a\cos\theta/2$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$x = a(\theta + \sin\theta); \quad y = a(1-\cos\theta).$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta); \quad \frac{dy}{d\theta} = a(\sin\theta).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} = \tan\theta/2$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta/2.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\tan\theta/2)$$

$$= \frac{d}{d\theta}(\tan\theta/2)\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\theta/2 \cdot \frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\theta/2 \cdot \frac{1}{a\,2\cos^2\theta/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta/2}\right)\cdot\frac{1}{2a\cos^2\theta/2} = \frac{1}{4a\cos^4\theta/2}$$

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+\tan^2\theta/2)^{3/2}}{\frac{1}{4a\cos^4\theta/2}}$$

$$= \frac{(\sec^2\theta/2)^{3/2}}{1/4a\cos^4\theta/2} = \frac{\sec^3\theta/2}{1/4a\cos^4\theta/2} = \sec^3\theta/2 \times$$

$$= \sec^3\theta/2 \times 4a\cos^4\theta/2 = \frac{4a\cos^4\theta/2}{\cos^3\theta/2}$$

$$\rho = 4a\cos\theta/2.$$

11. $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$ என்ற வளைவரைக்கு t என்ற புள்ளியில் ρ காண்க.

தீர்வு

$$x = a(\cos t + t\sin t) \ ; \ y = a(\sin t - t\cos t)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t.$$

$$\frac{dy}{dt} = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = \tan t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan t) = \frac{d}{dt}(\tan t)\frac{dt}{dx}$$

$$= (\sec^2 t)\frac{1}{at\cos t} = \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{at\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{at\cos^3 t}$$

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+\tan^2 t)^{3/2}}{\frac{1}{at\cos^3 t}}$$

$$= \frac{(\sec^2 t)^{3/2}}{\frac{1}{at\cos^3 t}} = \frac{\sec^3 t}{\frac{1}{at\cos^3 t}}$$

$$= \sec^3 t \times at\cos^3 t = \frac{1}{\cos^3 t} \times at\cos^3 t$$

$$\therefore \rho = at.$$

ALLIED MATHEMATICS FOR PHYSICS & CHEMISTRY

TITLE OF THE PAPER: CALCULUS AND VECTOR CALCULUS

PAPER CODE : 18KICH/PAM1

அலகு-III

வரையறு தொகையீடுகளின் பண்புகள்

இணைவுகை 1 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

நிறுவல் $LHS = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a) \longrightarrow (1)$

$RHS = -\int_b^a f(x)dx = -[F(x)]_b^a$

$= -[F(a)-F(b)] = F(b)-F(a) \longrightarrow (2)$

$(1) \& (2) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Example: $\int_1^2 x^2 dx = -\int_2^1 x^2 dx = 7/3$.

இணைவுகை 2 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$.

நிறுவல் $LHS = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \longrightarrow (1)$

$RHS = \int_a^b f(y)dy = F(b)-F(a) \longrightarrow (2)$

$(1) \& (2) \rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_1^3 x^3 dx = \int_1^3 y^3 dy = \int_1^3 u^3 du$

$\int_1^3 x^3 dx = [x^4/4]_1^3 = \frac{(3)^4-(1)^4}{4} = \frac{81-1}{4} = \frac{80}{4} = 20$.

$\therefore \int_1^3 x^3 dx = \int_1^3 y^3 dy = \int_1^3 u^3 du = 20$.

இணைவுகை 3: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. $a<c<b$

நிறுவல் $LHS = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \longrightarrow (1)$

$$RHS = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b$$

$$= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) \longrightarrow (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

இணைவுகை : $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$

நிரூபணம் $RHS = \int_0^a f(a-x)\,dx \longrightarrow (1)$

Limits: $a - x = y$; $x = 0 \Rightarrow y = a$; $x = a \Rightarrow y = 0.$

$$a - x = y \Rightarrow -dx = dy.$$

$$(1) \Rightarrow \int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(y)(-dy) = -\int_a^0 f(y)\,dy$$

$$= \int_0^a f(y)\,dy = \int_0^a f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$$

இணைவுகை : $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(-x)\,dx.$

நிரூபணம் $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \longrightarrow (1).$

RHS-ன் முதல் தொகையீட்டில் $x = -y$ + $dx = -dy$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-y)(-dy) = -\int_a^0 f(-y)\,dy$$

$$= \int_0^a f(-y)\,dy$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx. \longrightarrow (2).$$

$$(2) \text{ ல் } (1) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

இணைவுகை

$f(x)$ என்பது ஒற்றைச் சார்பு எனில் $f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

எடுத்துக்காட்டு $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 x \, dx = 0$.

துணைவுகை :

$f(x)$ ஒரு இரட்டை சார்பு எனில், $f(-x) = f(x)$

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

எடுத்துக்காட்டு $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 x \, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^4 x \, dx =$

துணைவுகை : $\int_{0}^{2a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(2a-x)dx$.

நிறுவல் $\int_{0}^{2a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{2a} f(x)dx \longrightarrow (1)$.

இரண்டாம் தொகையிடலின் RHS-ல்

$x = 2a - y \Rightarrow dx = -dy$.

Limits: $x = a \Rightarrow y = a$ & $x = 2a \Rightarrow y = 0$.

$\therefore \int_{a}^{2a} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(2a-y)(-dy) = -\int_{a}^{0} f(2a-y)dy$

$= \int_{0}^{a} f(2a-y)dy = \int_{0}^{a} f(2a-x)$

$\int_{a}^{2a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(2a-x)dx \longrightarrow (2)$.

(2) ல் (1) $\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(2a-x)dx$.

துணைவுகை

If $f(x) = f(2a-x)$, $\int_{0}^{2a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$.

நிறுவல்:

$\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{0}^{2\pi/2} \sin^2 x \, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$.

(ii) $\lambda = u'' + \Gamma_{11}^{1} u'^2 + 2\Gamma_{12}^{1} u'v' + \Gamma_{22}^{1} v'^2$

$$\mu = v'' + \Gamma_{11}^{2} u'^2 + 2\Gamma_{12}^{2} u'v' + \Gamma_{22}^{2} v'^2.$$

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}E_1 = 0;\ \Gamma_{112} = \frac{1}{2}E_2 = 0,\ \Gamma_{122} = F_2 - \frac{1}{2}G_1 = -u.$$

$$\Gamma_{211} = F_1 - \frac{1}{2}E_2 = 0,\ \Gamma_{212} = \frac{1}{2}G_1 = u;\ \Gamma_{222} = \frac{1}{2}G_2 = 0.$$

Hence $\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{H^2}(G\Gamma_{111} - F\Gamma_{211}) = 0,\ \Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{H^2}(G\Gamma_{112} - F\Gamma_{212}) = 0$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{1}{H^2}(G\Gamma_{122} - F\Gamma_{222}) = \frac{1}{\alpha^2+u^2}(\alpha^2+u^2)(-u) = -u.$$

$$\therefore \lambda u'' - uv'^2.$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{H^2}[E\Gamma_{211} - F\Gamma_{111}] = 0,\ \Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{H^2}(E\Gamma_{212} - \Gamma_{112}F) = \frac{u}{\alpha^2+u^2}.$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{H^2}(E\Gamma_{222} - F\Gamma_{122}) = 0.$$

$$\therefore \mu = v'' + \frac{2u'v'u}{\alpha^2+u^2} = \frac{1}{\alpha^2+u^2}\left(v''(\alpha^2+u^2) + 2uu'v'\right)$$

(iii) $\lambda = \frac{1}{H^2}\frac{U}{v'}\frac{\partial T}{\partial v'} = -\frac{1}{H^2}\frac{V}{u'}\frac{\partial T}{\partial v'}$

$$\mu = \frac{1}{H^2}\frac{V}{u'}\frac{\partial T}{\partial u'} = -\frac{1}{H^2}\frac{U}{v'}\frac{\partial T}{\partial u'}$$

using (1), (2) + (3).

$$\lambda = \frac{1}{\alpha^2+u^2}\cdot\frac{u'' - uv'^2}{v'}\,v'(\alpha^2+u^2) = u'' - uv'^2.$$

$$\lambda = -\frac{1}{\alpha^2+u^2}\left((u^2+\alpha^2)v'' + 2uu'v'\right)\frac{v'}{u'}(\alpha^2+u^2)$$

$$= \frac{-v'}{u'}\left((u^2+\alpha^2)v'' + 2uu'v'\right)$$

using (1), (2) + (3)

$$\mu = \frac{1}{\alpha^2+u^2}\left((u^2+\alpha^2)v'' + 2uu'v'\right) \text{ and}$$

$$\mu = -\frac{1}{\alpha^2+u^2}\left(\frac{u''-uv'^2}{v'}\right)u'.$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \log(\sin x) = I \longrightarrow ③$$

$$② \text{ ல் } ③ \Rightarrow 2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2 \Rightarrow 2I - I = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\log 2 = (-1)\frac{\pi}{2}\log 2.$$

$$I = \frac{\pi}{2}\log(2)^{-1} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{2}\log(1/2).}$$

13.3 குறைப்பு முறை சூத்திரம்

i.) $I_n = \int \sin^n x\,dx$

<u>நிரூபணம்</u>

$$I_n = \int \sin^n x\,dx$$

$$= \int \sin^{n-1}x \sin x\,dx = \int \sin^{n-1}x\, d(-\cos x)$$

$$u = \sin^{n-1}x \Rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2}x \cos x\,dx$$

$$dv = d(-\cos x) \Rightarrow v = -\cos x. \quad \left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right)$$

$$I_n = \sin^{n-1}x(-\cos x) - \int(-\cos x)(n-1)\sin^{n-2}x \cos x\,dx.$$

$$= -\sin^{n-1}x \cos x + \int \cos x(n-1)\sin^{n-2}x \cos x\,dx.$$

$$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2}x\,dx.$$

$$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx$$

$$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \{\sin^{n-2}x - \sin^n x\}dx.$$

$$= -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

$$I_n = -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$I_n + (n-1)I_n = -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)I_{n-2}$$

$$\therefore (n-1+1)I_n = -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)I_{n-2}$$

$$nI_n = -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{-\sin^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

(ii) $\int \cos^n x\, dx$

நிறுவல்

$$I_n = \int \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\, dx$$

$$= \int \cos^{n-1} x\, d(\sin x) \qquad \left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right)$$

$$u = \cos^{n-1} x \rightarrow du = (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)\,dx$$

$$dv = d(\sin x) \rightarrow v = \int dv \Rightarrow v = \int d(\sin x) = \sin x.$$

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x - \int \sin x (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)\,dx.$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1)\sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx.$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx.$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\left\{\int \cos^{n-2} x\,dx - \int \cos^n x\,dx\right\}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.$$

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} = I_n + (n-1) I_n.$$

$$(n-1+1) I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$$

$$n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}. \,//$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \ n \text{ is even}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{2}{3}, \ n \text{ is odd}$$

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx = \frac{8-1}{8}\cdot\frac{8-3}{8-2}\cdot\frac{8-5}{8-4}\cdot\frac{8-7}{8-6}\cdot\pi/2.$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi/2 = \frac{35\pi}{256}.$$

② $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$

தீர்வு $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx = \frac{5-1}{5}\cdot\frac{5-3}{5-2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad n \text{ is even.} \\ \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3} \quad n \text{ is odd} \end{aligned}}$$

எடுத்துக்காட்டு

① $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \frac{6-1}{6}\cdot\frac{6-3}{6-2}\cdot\frac{6-5}{6-4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{6_2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$.

② $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx = \frac{7-1}{7}\cdot\frac{7-3}{7-2}\cdot\frac{7-5}{7-4} = \frac{6^2}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{35}$

மதிப்பிடு $\int_0^{\pi/2} x(1-x^2)^{1/2}\,dx$.

தீர்வு $x = \sin\theta$; $dx = \cos\theta\,d\theta$

Limits: $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ & $x = \pi/2 \Rightarrow \theta = 1$.

$\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d(-\cos\theta) = \left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1/3$

$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

[illegible]

$$\begin{aligned}
I_{mn} &= \int \sin^m x \cos^n x\,dx. = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x\,dx \\
&= \int \sin^m x \cos^{n-1} x\,d(\sin x) = \int \cos^{n-1} x\,d\left(\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right) \\
&= \cos^{n-1} x\,\frac{\sin^{m+1} x}{m+1} - \int \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\,d(\cos^{n-1} x). \\
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} - \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+1} x \cos^{n-2} x(-\sin x)\,dx \\
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx. \\
&= I_1 + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx \qquad \left(I_1 = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1}\right) \\
&= I_1 + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x(1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx. \\
&= I_1 + \frac{n-1}{m+1}\int \{\sin^m x \cos^{n-2} x - \sin^m x \cos^n x\}\,dx
\end{aligned}$$

② $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$

தீர்வு $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx = \frac{5-1}{5} \cdot \frac{5-3}{5-2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad n \text{ is even.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \quad n \text{ is odd}$$

எடுத்துக்காட்டு

① $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx = \frac{6-1}{6} \cdot \frac{6-3}{6-2} \cdot \frac{6-5}{6-4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$.

② $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx = \frac{7-1}{7} \cdot \frac{7-3}{7-2} \cdot \frac{7-5}{7-4} = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35}$

மதிப்பிடு $\int_0^{\pi/2} x(1-x^2)^{1/2} dx$.

தீர்வு $x = \sin\theta \;;\; dx = \cos\theta\, d\theta$

Limits: $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ & $x = \pi/2 \Rightarrow \theta = 1$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d(-\cos\theta) = \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1/3$$

$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

நிரூபணம்

$$I_{mn} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x\, dx$$

$$= \int \sin^m x \cos^{n-1} x\, d(\sin x) = \int \cos^{n-1} x\, d\left(\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right)$$

$$= \cos^{n-1} x \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} - \int \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} d(\cos^{n-1} x).$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+1} x \cos^{n-2} x (-\sin x)\, dx$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx.$$

$$\left(I_1 = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1}\right)$$

$$= I_1 + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \sin^2 x \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= I_1 + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x\, dx.$$

$$= I_1 + \frac{n-1}{m+1} \int \{\sin^m x \cos^{n-2} x - \sin^m x \cos^n x\}\, dx$$

$$I_{m,n} = I_1 + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

$$= I_1 + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n}$$

$$I_{m,n} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}$$

$$I_{m,n}\left(\frac{m+1+n-1}{m+1}\right) = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}$$

$$I_{m,n}\left(\frac{m+n}{m+1}\right) = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}$$

$$\therefore (m+n) \cdot I_{m,n} = \cos^{n-1} x \sin^{m+1} x + (n-1) I_{m,n-2} //$$

எடுத்துக்காட்டு

(1) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^5 x \, dx = \frac{4}{11} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{7} = \frac{8}{693}$

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x \, dx = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$.

அடுக்குத் தொகையீடுகள்

இரு அடுக்குத் தொகையீடு

$f(x,y)$ என்பது x-ல் ஆன சார்பு மற்றும் y = மாறிலி. x-ஐ $\phi_1(y)$ & $\phi_2(y)$ க்கு இடையில் தொகையிடும் பொழுது கிடைத்தால் y-ன் சார்பை $y=c$ & $y=d$ க்கு இடையில் தொகையிடச் செய்யும். R எனும் பகுதி தொகையீட்டின் பகுதியாகும். அதன் எல்லைகள் தொகையீட்டு எல்லைகளாகும், அவை (a, b)

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx.$$

எடுத்துக்காட்டு:

$\iint xy \, dx\, dy$ எனும் சார்பை $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தின் நேர்மறை எண்ணகத்தில் தொகையிடுக.

தீர்வு: $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$.

$$\therefore y = \sqrt{a^2-x^2}.$$

Limits:

$y = 0$ ல் $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a$

$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\iint xy\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy\,dx = \int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy \right\} dx.$$

$$= \int_0^a x\,dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^a x\,dx \left[y^2\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x\left[\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 - 0\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^a x(a^2-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (a^2x - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right\}_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{2}\left[a^2 - 0\right] - \frac{1}{4}\left[a^4 - 0\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{2}(a^2) - \frac{1}{4}(a^4)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right\}.$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2a^4 - a^4}{4}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^4}{4}$$

$$\iint xy\,dx\,dy = \frac{a^4}{8}.$$

எடுத்துக்காட்டு

$\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$ எனும் தொகையீட்டை $x+y \le 1$ எனும் பகுதியில் $x, y \ge 0$ என்று மதிப்பிடுக.

தீர்வு

$x + y = 1$

Limits: $x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x \rightarrow y = 0$ to $1 - x$.

$y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x = 0$ to 1.

$$\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + y^3/3\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left\{x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}\right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[(x^2 - x^3) + \frac{1}{3}\left(1^3 - x^3 - 3x + 3x^2\right)\right] dx.$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[3(x^2 - x^3) + (1 - x^3 - 3x + 3x^2)\right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (3x^2 - 3x^3 + 1 - x^3 - 3x + 3x^2)\,dx.$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-3x+6x^2-4x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x - \frac{3x^2}{2} + \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - 3/2 + 2 - 1\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{4-3}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \iint (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{6}.$$

மூன்று அடுக்குத் தொகையீடுகள்

$f(x,y,z)$ என்பது R எனும் பகுதியில் S எனும் பரப்பால் மூடப்பட்ட x,y,z-ஆல் ஆன ஒற்றை மதிப்புடைய தொடர் சார்பு ஆகும். R எனும் பகுதியை ΔR_{rst} எனும் சிறு பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொண்டு $f(x,y,z)$ எனும் சார்பை R-ல் மூன்று அடுக்கு தொகையீடாக வரையறுத்தால்,

$$\int f(x,y,z)\,dV = \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{\substack{r=1\\ s=1\\ t=1}} f(\xi_{rst}, \eta_{rst}, \zeta_{rst})\,\Delta V_{rst}$$

எனக் கிடைக்கும். $(r=n,\ s=m,\ t=p)$.

மூன்று அடுக்குத் தொகையீடு கொண்ட R-ஐ சிறு தளங்களாகப் பிரித்து அவற்றை மூன்று ஒருங்கிணைப்புத் தளங்களுக்கு இணையாகக் கருத,

$\Delta V_{rst} = \Delta X_r \Delta Y_s \Delta Z_t$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \int_R f(x,y,z)\,dV = \int_{z_1}^{z_2}\int_{f_1(z)}^{f_2(z)}\int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

எடுத்துக்காட்டு:

$x^2+y^2+z^2=a^2$ எனும் கோளத்தின் மேற்பகுதி எண்மத்தின் வழியே செல்லும் $\iiint xyz\,dx\,dy\,dz$ எனும் தொகையீட்டினை மதிப்பிடவும்.

தீர்வு: $x^2+y^2+z^2=a^2 \longrightarrow (1)$.

Limits: $(1) \Rightarrow z^2 = a^2-x^2-y^2 \Rightarrow z = 0$ to $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$z=0$ in $(1) \Rightarrow x^2+y^2=a^2 \Rightarrow y^2=a^2-x^2 \Rightarrow y=0$ to $\sqrt{a^2-x^2}$

$z=y=0$ in $(1) \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=0$ to a.

$$\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} xyz\,dz\,dy\,dx.$$

$$= \int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\left[\frac{xyz^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\left[z^2\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dy\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\left(\sqrt{a^2-y^2-x^2}\right)^2 dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (xy)(a^2-y^2-x^2)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2xy - xy^3 - x^3y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\left[\frac{a^2xy^2}{2} - \frac{xy^4}{4} - \frac{x^3y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\left[\frac{a^2x(\sqrt{a^2-x^2})^2}{2} - \frac{x(\sqrt{a^2-x^2})^4}{4} - \frac{x^3(\sqrt{a^2-x^2})^2}{2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\left(\frac{a^2x(a^2-x^2)}{2} - \frac{x(a^2-x^2)^2}{4} - \frac{x^3(a^2-x^2)}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a\left(\frac{2a^2x(a^2-x^2)}{4} - \frac{x(a^4+x^4-2a^2x^2)}{4} - \frac{2x^3(a^2-x^2)}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^a (2a^4x - 2a^2x^3 - a^4x - x^5 + 2a^2x^3 - 2a^2x^3 + 2x^5)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^a (2a^4x - 2a^2x^3 - a^4x + x^5)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2a^4x^2}{2} - \frac{2a^2x^4}{4} - \frac{a^4x^2}{2} + \frac{x^6}{6}\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{8}\left[a^4(a)^2 - \frac{a^2(a)^4}{2} - \frac{a^4(a)^2}{2} + \frac{(a)^6}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[a^6 - \frac{a^6}{2} - \frac{a^6}{2} + \frac{a^6}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{a^6}{6}\right) = \frac{a^6}{48}.$$

$$\therefore \int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} xyz\,dz\,dy\,dx = \frac{a^6}{48}.$$

ALLIED MATHEMATICS FOR PHYSICS & CHEMISTRY

TITLE OF THE PAPER : CALCULUS AND VECTOR CALCULUS

PAPER CODE : 18KICH/PAMI

அலகு - IV

வகையீட்டுக் கருவிகள்

2.1 வெக்டர் வகையீட்டுக் கருவி ∇ :

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}, \ \gamma \text{ is a scalar.}$$

$$\nabla \gamma = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\gamma$$

$$= \vec{i}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

2.2 கிரேடியண்ட் :

ஒரு பரப்பில் உள்ள பகுதியில் $\phi(x, y, z)$ என்பது ஒரு ஸ்கேலார் புள்ளியின் தொடர் வகையிடு கொண்ட சார்பு எனில் அதன் கிரேடியண்ட் ஆனது,

$$grad\,\phi = \nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

2.2.1 $Grad(\phi \pm \psi) = grad\,\phi \pm grad\,\psi.$

நிரூபணம்

$$Grad(\phi \pm \psi) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\phi \pm \psi)$$

$$Grad(\phi \pm \psi) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(\phi \pm \psi) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(\phi \pm \psi) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(\phi \pm \psi)$$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \pm \left(\vec{i}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

$$Grad(\phi \pm \psi) = grad\,\phi \pm grad\,\psi.$$

2.2.2 $Grad(\phi\psi) = \phi\, grad\,\psi + \psi\, grad\,\phi.$

நிரூபணம்

$$grad(\phi\psi) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\phi\psi)$$

$$= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(\phi\psi) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(\phi\psi)$$

$$= \vec{i}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \vec{j}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\phi + \psi\left(\vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \phi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\phi.$$

$$\therefore \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi.$$

2.3 டைவர்ஜன்ஸ்

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\vec{F}$$

$$= \vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot(F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

2.3.1 $\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{B}$

நிரூபணம்

$$\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$= \vec{i}\cdot\frac{\partial(\vec{A}+\vec{B})}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial(\vec{A}+\vec{B})}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial(\vec{A}+\vec{B})}{\partial z}$$

$$= \vec{i}\cdot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial x}\right) + \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right) + \vec{k}\cdot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\right) + \left(\vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla\cdot\vec{A} + \nabla\cdot\vec{B}$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{B}.$$

2.3.2 சாலினாய்டல் வெக்டர்

$\operatorname{div}\vec{F} = 0$ (ie) $\nabla\cdot\vec{F} = 0$ எனில்

வெக்டர் $\vec{F}$ ஆனது சாலினாய்டல் ஆகும்

2.4 சுருள் வெக்டர்

$\vec{F}$ ன் curl ஆனது $\nabla \times \vec{F}$.

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{F}$$

$$= \vec{i} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}.$$

$$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k})$$

$$\text{Curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

2.4.1 $\text{Curl}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{curl}\,\vec{A} + \text{curl}\,\vec{B}$.

நிரூபணம்

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \,;\quad \vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1)\vec{i} + (A_2 + B_2)\vec{j} + (A_3 + B_3)\vec{k}$$

$$\text{Curl}(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times (\vec{A} + \vec{B})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 + B_1 & A_2 + B_2 & A_3 + B_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Curl}(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(A_3 + B_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_2 + B_2)\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(A_3 + B_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_1 + B_1)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(A_2 + B_2) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1 + B_1)\right).$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$+ \vec{i}\left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial B_3}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)$$

$$\text{Curl}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{curl}\,\vec{A} + \text{curl}\,\vec{B}.$$

$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$

2.4.2. சுழற்சியற்ற வெக்டர்

Curl $\vec{F} = 0$ (ie) $\nabla \times \vec{F} = 0$ எனில் $\vec{F}$ சுழற்சியற்ற வெக்டராகும்.

2.4.3 எடுத்துக்காட்டு

(1) காண்க grad r^n, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

தீர்வு

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

$$\text{grad } r^n = \nabla r^n.$$

$$= \vec{i}\frac{\partial r^n}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial r^n}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial r^n}{\partial z}.$$

$$\text{grad } r^n = \vec{i}\left(n r^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \vec{j}\left(n r^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(n r^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$= \vec{i}\left(n r^{n-1}\cdot\frac{x}{r}\right) + \vec{j}\left(n r^{n-1}\frac{y}{r}\right) + \vec{k}\left(n r^{n-1}\frac{z}{r}\right)$$

$$= \vec{i}\left(x \cdot n \cdot r^{n-2}\right) + \vec{j}\left(y \cdot n \cdot r^{n-2}\right) + \vec{k}\left(z \cdot n \cdot r^{n-2}\right)$$

$$= \left(n r^{n-2}\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

$$\text{grad } r^n = \left(n r^{n-2}\right)\vec{r}.$$

(2) நிரூபணம் செய்க

(i) $\vec{A} = 3y^4z^2\vec{i} + 4x^3z^2\vec{j} - 3x^2y^2\vec{k}$ ஒரு சாலினாய்டல்

(ii) $\vec{B} = (6xy + z^3)\vec{i} + (3x^2 - z)\vec{j} + (3xz^2 - y)\vec{k}$ ஒரு சுழற்சியற்றது

நிரூபணம்:

(i) $\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3y^4z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^3z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y^2)$$

$$= (0) + 0 + 0$$

$$\text{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$\vec{A}$ ஒரு சாலினாய்டல்

(ii) $Curl\,\vec{B} = \nabla \times \vec{B}$, $\vec{B} = (6xy+z^3)\vec{i} + (3x^2-z)\vec{j} + (3xz^2-y)\vec{k}$

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy+z^3 & 3x^2-z & 3xz^2-y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2-y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2-z)\right\}$$
$$-\vec{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2-y) - \frac{\partial}{\partial z}(6xy+z^3)\right\}$$
$$+\vec{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy+z^3)\right\}$$

$$= \vec{i}(-1+1) - \vec{j}(3z^2-3z^2) + \vec{k}(6x-6x).$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \Rightarrow Curl\,\vec{B} = 0.$$

$\therefore \vec{B}$ ஒரு சுழற்சியற்றது

2.5 எடுத்துக்காட்டு

① $\vec{V} = x^2y\vec{i} - 2zx\vec{j} + 2yz\vec{k}$, $curl\,curl\,\vec{V} = ?$

தீர்வு

$$Curl\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \partial/\partial y & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2zx & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(-2zx)\right)$$
$$-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y)\right)$$
$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-2zx) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right)$$

$$Curl\,\vec{V} = \vec{i}(2z+2x) - \vec{j}(0) + \vec{k}(-2z-x^2)$$

$$Curl\,Curl\,\vec{V} = \nabla \times Curl\,\vec{V}$$
$$= \nabla \times \left[(2x+2z)\vec{i} - (x^2+2z)\vec{k}\right]$$

$$\text{curl curl}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2z & 0 & -(x^2+2z) \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-(x^2+2z))\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-(x^2+2z)) - \frac{\partial}{\partial z}(2x+2z)\right] + \vec{k}\left[-\frac{\partial}{\partial y}(2x+2z)\right]$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}(-2x-2) + \vec{k}(0)$$

$$\text{curl curl}\,\vec{v} = \vec{j}(2x+2).$$

(2) $\phi = x^2y^3z^4$, டைவர்ஜன்ஸ் & curl grad ϕ காண்க

தீர்வு

$$\text{grad}\,\phi = \nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \vec{i}\frac{\partial(x^2y^3z^4)}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial(x^2y^3z^4)}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial(x^2y^3z^4)}{\partial z}$$

$$= \vec{i}(2xy^3z^4) + \vec{j}(3x^2y^2z^4) + \vec{k}(4x^2y^3z^3).$$

(i) $\text{div grad}\,\phi = \nabla\cdot\nabla\phi$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot\Big(\vec{i}(2xy^3z^4) + \vec{j}(3x^2y^2z^4) + \vec{k}(4x^2y^3z^3)\Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2z^4) + \frac{\partial}{\partial z}(4x^2y^3z^3)$$

$$\text{div grad}\,\phi = 2y^3z^4 + 6x^2yz^4 + 12x^2y^3z^2.$$

(ii) $\text{curl grad}\,\phi = \nabla\times\nabla\phi$

$$\nabla\times\nabla\phi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \partial/\partial z \\ 2xy^3z^4 & 3x^2y^2z^4 & 4x^2y^3z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(4x^2y^3z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y^2z^4)\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^3z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy^3z^4)\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2z^4) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3z^4)\right]$$

$$= \vec{i}(12x^2y^2z^3 - 12x^2y^2z^3) - \vec{j}(8xy^3z^3 - 8xy^3z^3) + \vec{k}(6xy^2z^4 - 6xy^2z^4)$$

$$= \vec{i}(0) + \vec{j}(0) + \vec{k}(0) \Rightarrow \text{curl grad}\,\phi = \nabla\times\nabla\phi = 0.$$

வெக்டர் சூத்திரங்கள்

1. $div(\phi\vec{F}) = \phi \, div\vec{F} + \vec{F}\cdot grad\,\phi$

$$\nabla\cdot\phi\vec{F} = \phi(\nabla\cdot\vec{F}) + \vec{F}\cdot(\nabla\phi)$$

2. $curl(\phi\vec{F}) = \phi \, curl\vec{F} + (grad\,\phi)\times\vec{F}$

$$\nabla\times(\phi\vec{F}) = \phi(\nabla\times\vec{F}) + (\nabla\phi)\times\vec{F}.$$

3. $div(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot curl\vec{A} - \vec{A}\cdot curl\vec{B}$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

4. $Curl(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\,div\vec{B} - \vec{B}\,div\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

5. $Curl(grad\,\phi) = 0$ (ie) $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$

6. $div(curl\,\vec{A}) = 0$ (ie) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$

7. $div(grad\,\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi.$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ லாப்லாசியன் கருவி

எடுத்துக்காட்டு

(1) If $u = x^2 - y^2$ எனில் $\nabla^2 u = 0$.

தீர்வு

$$\nabla^2 u = \nabla\cdot(\nabla u) = \nabla\cdot\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u$$

$$= \nabla\cdot\left(\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla\cdot\left(\vec{i}\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla\cdot\left(\vec{i}(2x) + \vec{j}(-2y) + \vec{k}(0)\right)$$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}\,2x + \vec{j}(-2y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x) - \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(2y) + \vec{k}(0)$$

$$= 2 - 2$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = 0.$$

(2) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ எனில் $div\,\vec{r} = 3$ & $curl\,\vec{r} = 0$

தீர்வு:

$$div\,\vec{r} = \nabla \cdot \vec{r}$$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

$$= (1) + (1) + (1)$$

$$div\,\vec{r} = 3.$$

$$curl\,\vec{r} = \nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{r} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(x)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right)$$

$$\nabla \times \vec{r} = \vec{i}(0) + \vec{j}(0) + \vec{k}(0).$$

$$\nabla \times \vec{r} = 0.$$

(3) a-ன் மதிப்பைக் காண்க $\vec{F} = (x+3y)\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (x+az)\vec{k}$ ஒரு சாலனாய்டல்

தீர்வு

$\vec{F}$ ஒரு சாலனாய்டல் $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = 0$

$$\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left((x+3y)\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (x+az)\vec{k}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az) = 0.$$

(ie) $1 + 1 + a = 0 \Rightarrow 2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$.

(4) $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$, ST $\nabla^2\vec{F} = 0$.

தீர்வு $\nabla^2\vec{F} = \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial z^2}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(y\vec{i} + z\vec{k}) + \frac{\partial}{\partial y}(x\vec{i} + z\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial z}(y\vec{j} + x\vec{k})$$

$$= 0 + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{F} = 0.$$

(5) காண்க grad ϕ if $\phi = xyz$ at $(1,1,1)$

Soln: $\phi = xyz$, grad $\phi = \nabla\phi$.

$$\nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \vec{i}\frac{\partial(xyz)}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial(xyz)}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial(xyz)}{\partial z}$$

$$= \vec{i}(yz) + \vec{j}(xz) + \vec{k}(xy)$$

$$(\nabla\phi)_{(1,1,1)} = \vec{i}(1) + \vec{j}(1) + \vec{k}(1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

(6) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ என்னும் திசையில் $(1,1,1)$ என்ற புள்ளியில் $\phi = x.y.z$ ன் திசை வகையீட்டைக் காண்க.

தீர்வு: $$\hat{n} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{grad}\,\phi = \nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \vec{i}\frac{\partial(xyz)}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial(xyz)}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial(xyz)}{\partial z}$$

$$= \vec{i}\,yz + \vec{j}\,xz + \vec{k}\,xy$$

$$(\text{grad}\,\phi)_{(1,1,1)} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$$

திசை வகையீடு $= \text{grad}\,\phi \cdot \hat{n}$

$$= (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\cdot\left(\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1+1+1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

திசை வகையீடு $= \sqrt{3}$

எடுத்துக்காட்டு

$$\nabla^2(r^n\vec{r}) = n(n+3)r^{n-2}\vec{r}.$$

தீர்வு $$\nabla^2(r^n\vec{r}) = \left(\vec{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \vec{j}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \vec{k}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(r^n\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^n\vec{r}) = nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\vec{r} + r^n\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^n \vec{r}) = n r^{n-1} \vec{r}\left(\frac{x}{r}\right) + r^n \vec{i} \quad \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^n \vec{r}) = n r^{n-2} \vec{r} x + r^n \vec{i}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^n \vec{r}) = n\left[r^{n-2} \vec{r} + (n-2) r^{n-2} \frac{\partial r}{\partial x} x \vec{r} + r^{n-2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} x\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^n \vec{r}) = n\left[r^{n-2} \vec{r} + (n-2) x^2 r^{n-4} \vec{r} + r^{n-2} x \vec{i}\right] + n r^{n-2} x \vec{i}$$

$$= \left[n(n-2) r^{n-4} x^2 + n r^{n-2}\right] \vec{r} + 2n r^{n-2} x \vec{i}$$

$$\therefore \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^n \vec{r}) = \left[n(n-2) r^{n-4}(x^2+y^2+z^2) + 3n r^{n-2}\right] \vec{r} + 2n r^{n-2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \left[n(n-2) r^{n-2} + 3n r^{n-2}\right] \vec{r} + 2n r^{n-2} \vec{r}$$

$$= (n^2 + 3n) r^{n-2} \vec{r}$$

$$\nabla^2 r^n \vec{r} = n(n+3) r^{n-2} \vec{r}.$$

எடுத்துக்காட்டு

$\vec{A}, \vec{B}$ சுழற்சியற்றது எனில் $\vec{A} \times \vec{B}$ சாலினாய்டல் என நிறுவுக.

தீர்வு

$\vec{A}$ & $\vec{B}$ → irrotational

$\text{curl}\, \vec{A} = 0, \ \text{curl}\, \vec{B} = 0.$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$= \vec{B} \cdot \text{curl}\, A - \vec{A} \cdot \text{curl}\, \vec{B}$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B}$ ஒரு சுழற்சியற்றது

ALLIED MATHEMATICS FOR PHYSICS & CHEMISTRY

TITLE OF THE PAPER : CALCULUS AND VECTOR CALCULUS

PAPER CODE : 18KICH/PAM1

அலகு V

வெக்டர்களின் தொகையிடு & தொகையீட்டு தேற்றம்

கோட்டுத் தொகையிடு:

ஒரு வளைவின் மீது மதிப்பிடும் தொகையிடு கோட்டுத் தொகையிடு எனப்படும்.

வட்ட சுழற்சி:

$\vec{F}$ எனும் வெக்டரின் தொடுகோட்டுத் தொகையிடு ஒரு C எனும் மூடிய வளைவின் சுற்றுப்புறத்தில் அமையுமானால் அது C-யைப் பொறுத்து $\vec{F}$ன் வட்ட சுழற்சி எனப்படும். $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

ஒரு விசையின் செய்யப்பட்ட வேலை:

$\vec{F}(x,y,z)$ என்பது C என்ற வளைவில் நகரும் துகளின் மீது செயல்படும் விசை எனில் $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ என்பது $\vec{F}$-ன் செய்யப்பட்ட வேலை. ஆகும். $\vec{F} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

பரப்புத் தொகையிடு:

ஒரு பரப்பின் மீது மதிப்பிடும் தொகையிடு பரப்புத் தொகையிடு எனப்படும்; $\iint_S \phi \, ds$

பாய்வு: (பாயம்)

ஒரு பரப்பின் மீது உள்ள வெக்டர் புள்ளியின் செங்குத்து பகுதியின் தொகையிடு எடுத்துக் கொண்ட பரப்புத் தொகையீட்டில் கருதப்படுவது பாய்வு எனப்படும். பாய்வைக் குறிக்க (S-ன் மீது $\vec{F}$) $\iint_S \vec{F}\cdot \hat{n}\, ds$.

எடுத்துக்காட்டு 1

$\vec{F} = xy\vec{i} - zx\vec{j} + \vec{k}$ & V என்பது $x^2+y^2+z^2=4;\ x, y \geq 0$ என்ற கோளத்தின் எண்மம் எனில் $\int_V \vec{F}\, dV$-யை மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_V \vec{F}\, dV = \int_V (xy\vec{i} - zx\vec{j} + \vec{k})\, dV$$

$$= \vec{i}\int_V xy\, dV - \vec{j}\int_V zx\, dV + \vec{k}\int_V dV \longrightarrow (1).$$

$$\int_V xy\, dV = \iiint_V xy\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} xy\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} x\, dx\; y\, dy\, dz = \int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2-z^2}} y\, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} y(4-y^2-z^2)\, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} (4y - y^3 - z^2 y)\, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\frac{4y^2}{2} - \frac{y^4}{4} - \frac{z^2y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\frac{4(4-z^2)}{2} - \frac{(4-z^2)^2}{4} - \frac{z^2(4-z^2)}{2}\right] dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\frac{(16-4z^2)}{2} - \frac{(16+z^4-8z^2)}{4} - \frac{(4z^2-z^4)}{2}\right] dz$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 \left[32 - 8z^2 - 16 - z^4 + 8z^2 - 8z^2 + 2z^4\right] dz$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 (16 - 8z^2 + z^4)\, dz = \frac{1}{8}\left[16z - \frac{8z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right]_0^2$$

$$\int_V xy\,dV = \frac{1}{8}\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right)$$

$$= \frac{32}{8} - \frac{64}{8\cdot 3} + \frac{32}{8\cdot 5}$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{5}$$

$$= \frac{60-40+12}{15}$$

$$\int_V xy\,dV = \frac{32}{15} \longrightarrow (2)$$

இதுபோலவே $\int_V zx\,dV = \frac{32}{15} \longrightarrow (3)$

$$\int_V dV = V$$

$$= \frac{1}{8} \times \text{கோளத்தின் கன அளவு}$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3$$

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi \longrightarrow (4)$$

$$(1) \Rightarrow \int_V \vec{F}\,dV = \frac{32}{15}\vec{i} - \frac{32}{15}\vec{j} + \frac{4\pi}{3}\vec{k}$$

எடுத்துக்காட்டு - 2

$\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$; $x=t, y=t^2, z=t^3$ எனில் C ன் மீது $(0,0,0)$ to $(1,1,1)$ -ல் $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}.$$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left[(3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}\right]\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$= \int_C (3x^2+6y)\,dx - (14yz)\,dy + 20xz^2\,dz$$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left[(3x^2+6y)\frac{dx}{dt} - (14yz)\frac{dy}{dt} + (20xz^2)\frac{dz}{dt}\right]dt$$

$x = t \rightarrow dx = dt$ & $\frac{dx}{dt} = 1$

$y = t^2 \rightarrow dy = 2t\,dt$ & $\frac{dy}{dt} = 2t$

$z = t^3 \Rightarrow dz = 3t^2 dt$ & $\frac{dz}{dt} = 3t^2$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{x,y,z=0}^{1} \left[(3x^2+6y)(1) - (14yz)(2t) + (20xz^2)(3t^2)\right]dt$$

$$= \int_0^1 \left[(3t^2+6t^2) - (14\cdot t^2\cdot t^3)(2t) + (20\cdot t\cdot t^6)(3t^2)\right]dt$$

$$= \int_0^1 \left[3t^2+6t^2 - 28t^6 + 60t^9\right]dt$$

$$= \left[\frac{3t^3}{3} + \frac{6t^3}{3} - \frac{28t^7}{7} + \frac{60t^{10}}{10}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{3(1)}{3} + \frac{6(1)}{3} - \frac{28(1)}{7} + \frac{60(1)}{10}\right]$$

$$= 1+2-4+6$$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 5.$$

எடுத்துக்காட்டு-3

$x = 2\sin 3t,\ y = 2\cos 3t,\ z = 8t$ என்ற வளைவரையில் நகரும் துகளின் திசைவேகம் மற்றும் முடுக்கம் ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

திசைவேகம் $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$= \frac{d}{dt}(2\cos 3t)\vec{i} + \frac{d}{dt}(2\cos 3t)\vec{j} + \frac{d}{dt}(8t)\vec{k}$$

$$= 6\cos 3t\,\vec{i} - 6\sin 3t\,\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(6\cos 3t)^2 + (6\sin 3t)^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36\cos^2 3t + 36\sin^2 3t + 64}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{36(\cos^2 3t+\sin^2 3t)+64} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$$

$$|\vec{V}| = 10.$$

முடுக்கம்

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(6\cos 3t\,\vec{i} - 6\sin 3t\,\vec{j} + 8\vec{k})$$

$$= -18\sin 3t\,\vec{i} - 18\cos 3t\,\vec{j}$$

$$\left|\frac{dv}{dt}\right| = \sqrt{18^2\sin^2 3t + 18^2\cos^2 3t}$$

$$= \sqrt{18^2(\sin^2 3t+\cos^2 3t)} = \sqrt{18^2}$$

$$\left|\frac{dv}{dt}\right| = 18.$$

எடுத்துக்காட்டு -4

$\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ & S என்பது $x^2+y^2+z^2=1$ என்ற கோளத்தின் முதல் எண்மம் எனில் $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$ -ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு

$$\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k},$$

$$\phi = x^2+y^2+z^2-1 \Rightarrow \nabla\phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}}$$

$$= \frac{2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = (yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k})\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$= xyz + xyz + xyz$$

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = 3xyz$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_R \vec{F}\cdot\hat{n}\,\frac{dx\,dy}{|\hat{n}\cdot\vec{k}|}$$

$$|\hat{n}\cdot\vec{k}| = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\vec{k} = z.$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_R 3xyz\,\frac{dx\,dy}{z}.$$

$$= 3\iint_R xy\,dy\,dz = 3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx.$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = 3\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x^2)\,dx.$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (x-x^3)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2-1}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{3}{8}.$$

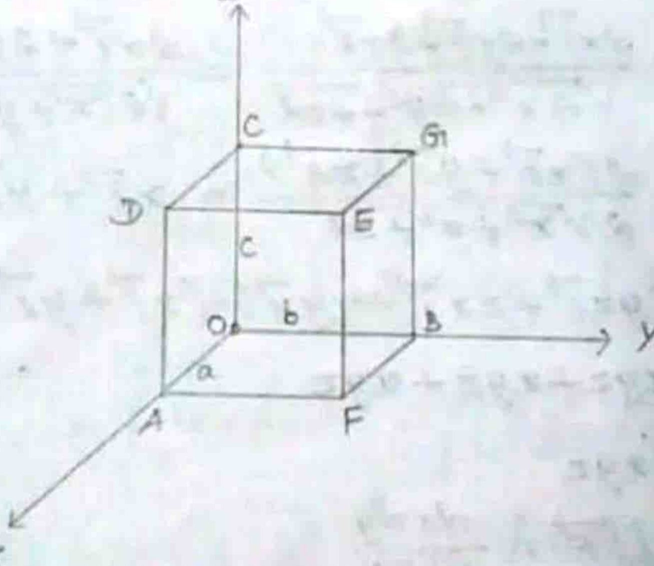
எடுத்துக்காட்டு - 5

$\vec{F} = (x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy\vec{k})$ & S என்பது $0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c$ எனும் கன செவ்வகம் எனில் காஸ் டைவர்ஜன்ஸ் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு:

காஸ் டைவர்ஜன்ஸ் தேற்றம் ஆனது

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv$$



S ⇒ கன செவ்வகத்தின் மொத்த பரப்பு.

V ⇒ கன செவ்வகத்தின் S-ஆல் மூடப்பட்ட கன அளவு.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ⇒ X, Y, Z அச்சுகளின் ஒருமை வெக்டர்கள்.

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ ⇒ DEFA, CGBO, EGBF, OCDA, DEGC, OAFB ஆகியவற்றின் முகங்கள் & $\vec{i}, -\vec{i}, \vec{j}, -\vec{j}, \vec{k}, -\vec{k}$ முகங்களின் புறத்துள்ள ஒருமை செங்குத்து வெக்டர்கள்.

காஸ் டைவர்ஜென்ஸ் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv$$

(i) $\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv$

$$\vec{F} = (x^2-yz)\vec{i} + (y^2-zx)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-zx)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2-yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2-zx) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2-xy)$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = 2x+2y+2z \quad \& \quad dv = dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv = \iiint_V 2(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\int_0^a\int_0^b\int_0^c (x+y+z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= 2\int_0^a\int_0^b \left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)_0^c dy\,dx$$

$$= 2\int_0^a\int_0^b \left(xc+yc+c^2/2\right)dy\,dx$$

$$= 2\int_0^a \left(xcy+\frac{y^2c}{2}+\frac{c^2y}{2}\right)_0^b dx$$

$$= 2\int_0^a \left(xbc+\frac{b^2c}{2}+\frac{bc^2}{2}\right)dx.$$

$$= 2\left(\frac{x^2bc}{2}+\frac{xb^2c}{2}+\frac{xbc^2}{2}\right)_0^a$$

$$= 2\left(\frac{a^2bc+ab^2c+abc^2}{2}\right)$$

$$= \frac{2(abc)(a+b+c)}{2}$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv = abc(a+b+c) \longrightarrow (A).$$

(ii) $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} + \iint_{S_5} + \iint_{S_6}$

(a) $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{DEFA} \left[(x^2-yz)\vec{i}+(y^2-zx)\vec{j}+(z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot\vec{i}\,dy\,dz$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \int_0^c\int_0^b (x^2-yz)\,dy\,dz = \int_0^c\int_0^b (a^2-yz)\,dy\,dz \quad (x=a).$$

$$= \int_0^c \left[a^2y - \frac{y^2z}{2}\right]_0^b dz = \int_0^c \left(a^2b - \frac{b^2z}{2}\right) dz$$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \left[a^2bz - \frac{b^2z^2}{4}\right]_0^c = \left[a^2bc - \frac{b^2c^2}{4}\right] \longrightarrow (1).$$

(b) $$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{CGBO} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(-\vec{i})\,dy\,dz$$

$$= -\int_0^c\int_0^b (x^2-yz)\,dy\,dz = -\int_0^c\int_0^b (-yz)\,dy\,dz \quad (x=0)$$

$$= \int_0^c \left[\frac{zy^2}{2}\right]_0^b dz = \frac{1}{2}\int_0^c b^2z\,dz = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2z^2}{2}\right]_0^c$$

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{b^2c^2}{4} \longrightarrow (2).$$

(c) $$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{EGBF} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(\vec{j})\,dx\,dz$$

$$= \int_0^a\int_0^c (y^2-xz)\,dz\,dx = \int_0^a\int_0^c (b^2-xz)\,dz\,dx \quad (y=b)$$

$$= \int_0^a \left[b^2z - \frac{xz^2}{2}\right]_0^c dx = \int_0^a \left(b^2c - \frac{xc^2}{2}\right) dx$$

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \left[xb^2c - \frac{x^2c^2}{4}\right]_0^a = ab^2c - \frac{a^2c^2}{4} \longrightarrow (3).$$

(d) $$\iint_{S_4} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{DCOA} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(-\vec{j})\,dx\,dz$$

$$= \int_0^a\int_0^c -(y^2-xz)\,dz\,dx = \int_0^a\int_0^c -(-xz)\,dz\,dx \quad (y=0)$$

$$= \int_0^a\int_0^c xz\,dz\,dx = \int_0^a \left[\frac{xz^2}{2}\right]_0^c dx = \int_0^a \frac{xc^2}{2}\,dx$$

$$\iint_{S_4} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2c^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2c^2}{4} \longrightarrow (4).$$

(e) $$\iint_{S_5} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{DEGC} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(\vec{k})\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a\int_0^b (z^2-xy)\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^b (c^2-xy)\,dy\,dx \quad (z=c)$$

$$\iint_{S_5} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \int_0^a \left[c^2y - \frac{xy^2}{2}\right]_0^b dx = \int_0^a \left(bc^2 - \frac{xb^2}{2}\right) dx$$

$$= \left[xbc^2 - \frac{x^2b^2}{4}\right]_0^a = abc^2 - \frac{a^2b^2}{4} \longrightarrow (5).$$

(f) $$\iint_{S_6} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{OAFB} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(-\vec{k})\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a\int_0^b -(z^2-xy)\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^b (xy)\,dy\,dx \quad (z=0)$$

$$= \int_0^a \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^b dx = \int_0^a \frac{xb^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^2b^2}{4}\right]_0^a$$

$$\iint_{S_6} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{a^2b^2}{4} \longrightarrow (6).$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} + \iint_{S_5} + \iint_{S_6} \longrightarrow (7).$$

(1), (2), (3), (4), (5), (6) ல் (7)

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \left(a^2bc - \frac{b^2c^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2c^2}{4}\right) + \left(ab^2c - \frac{a^2c^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2c^2}{4}\right) + \left(abc^2 - \frac{a^2b^2}{4}\right) + \frac{a^2b^2}{4}$$

$$= a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = abc(a+b+c) \longrightarrow (B).$$

(A) & (B) $\Rightarrow$ $$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv.$$

எனவே காஸ் டைவர்ஜென்ஸ் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது

எடுத்துக்காட்டு - 6:

C எனும் வளைவில் $x^2+y^2=4,\ z=2$, $\int_C e^x dx + 2y\,dy - dz$ ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தின் படி மதிப்பிடுக.

தீர்வு: ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் ஆனது

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (e^x dx + 2y\,dy - dz).$$

$\therefore \vec{F} = e^x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^x & 2y & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-1) - \frac{\partial}{\partial z}(2y)\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-1) - \frac{\partial}{\partial z}(e^x)\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x)\right]$$

$\text{curl}\,\vec{F} = \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(0)$

$\text{curl}\,\vec{F} = 0 \Rightarrow \iint\limits_S \text{curl}\,\vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = 0$

$\therefore \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

(ie) $\int\limits_C (e^x dx + 2y\,dy - dz) = 0$

எடுத்துக்காட்டு -7:

$\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ எனில் $y = x$ எனும் கோட்டின் மேல் $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பை $(0,0)$ லிருந்து $(1,1)$ வரை காண்க.

தீர்வு: $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$; $y = x \Rightarrow dy = dx$.

$\therefore \vec{F} = x^2\vec{i} + x^2\vec{j}$ $(y = x)$; $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + d\ \vec{j}$

$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (x^2\vec{i} + x^2\vec{j})\cdot(dx\vec{i} + dx\vec{j})$

$= x^2dx + x^2dx \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2x^2dx$.

$\int\limits_{y=x} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 2x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2(1/3)$.

$\therefore \int\limits_{y=x} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2/3$.

ALLIED MATHEMATICS FOR PHYSICS & CHEMISTRY

TITLE OF THE PAPER: CALCULUS AND VECTOR CALCULUS

PAPER CODE : 18KICH/PAM1

அலகு V

வெக்டர்களின் தொகையீடு & தொகையீட்டு தேற்றம்

கோட்டுத் தொகையீடு:

ஒரு வளைவின் மீது மதிப்பிடும் தொகையீடு கோட்டுத் தொகையீடு எனப்படும்.

வட்ட சுழற்சி:

$\vec{F}$ எனும் வெக்டரின் தொலைகோட்டுத் தொகையீடு ஒரு C எனும் மூடிய வளைவின் சுற்றுப்புறத்தில் அமையுமானால் அது C-யைப் பொறுத்து $\vec{F}$ன் வட்ட சுழற்சி எனப்படும். $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

ஒரு விசையின் செய்யப்பட்ட வேலை:

$\vec{F}(x,y,z)$ என்பது C என்ற வளைவில் நகரும் துகளின் மீது செயல்படும் விசை எனில் $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ என்பது $\vec{F}$-ன் செய்யப்பட்ட வேலை. ஆகும். $F = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

பரப்புத் தொகையீடு:

ஒரு பரப்பின் மீது மதிப்பிடும் தொகையீடு பரப்புத் தொகையீடு எனப்படும்; $\iint_S \phi\, ds$

பாய்வு: (பாயம்)

ஒரு பரப்பின் மீது உள்ள வெக்டர் புள்ளியின் செங்குத்து பகுதியின் தொகையீடு எடுத்துக் கொண்ட பரப்புத் தொகையீட்டில் கருதப்படுவது பாய்வு எனப்படும். பாய்வைக் குறிக்க (S-ன் மீது $\vec{F}$) $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds$.

எடுத்துக்காட்டு :

$\vec{F} = xy\vec{i} - zx\vec{j} + \vec{k}$ & V என்பது $x^2+y^2+z^2=4;\ x,y \geq 0$ என்ற கோளத்தின் கனப் பகுதியில் $\int_V \vec{F}\,dV$-யை மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$\int_V \vec{F}\,dV = \int_V (xy\vec{i} - zx\vec{j} + \vec{k})\,dV$$

$$= \vec{i}\int_V xy\,dV - \vec{j}\int_V zx\,dV + \vec{k}\int_V dV \longrightarrow (1).$$

$$\int_V xy\,dV = \iiint_V xy\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} xy\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} x\,dx\;y\,dy\,dz = \int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2-z^2}} y\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} y(4-y^2-z^2)\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} (4y-y^3-z^2y)\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\left[\frac{4y^2}{2}-\frac{y^4}{4}-\frac{z^2y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\left[\frac{4(4-z^2)}{2}-\frac{(4-z^2)^2}{4}-\frac{z^2(4-z^2)}{2}\right] dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\left[\frac{(16-4z^2)}{2}-\frac{(16+z^4-8z^2)}{4}-\frac{(4z^2-z^4)}{2}\right] dz$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2\left[32-8z^2-16-z^4+8z^2-8z^2+2z^4\right] dz$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 (16-8z^2+z^4)\,dz = \frac{1}{8}\left[16z-\frac{8z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right]_0^2$$

$$\int_V xy\,dV = \frac{1}{8}\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right)$$

$$= \frac{32}{8} - \frac{64}{8\cdot 3} + \frac{32}{8\cdot 5}$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{5}$$

$$= \frac{60-40+12}{15}$$

$$\int_V xy\,dV = \frac{32}{15} \longrightarrow (2)$$

இதுபோலவே $\displaystyle\int_V zx\,dV = \frac{32}{15} \longrightarrow (3)$

$$\int_V dV = V$$

$$= \frac{1}{8} \times \text{கோளத்தின் கன அளவு}$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3$$

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi \longrightarrow (4)$$

$$(1) \Rightarrow \int_V \vec{F}\,dV = \frac{32}{15}\vec{i} - \frac{32}{15}\vec{j} + \frac{4\pi}{3}\vec{k}$$

எடுத்துக்காட்டு-2

$\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$, $x=t, y=t^2, z=t^3$ எனில் C ன் வழியே $(0,0,0)$ to $(1,1,1)$-ல் $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}.$$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left[(3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}\right]\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$= \int_C (3x^2+6y)\,dx - (14yz)\,dy + 20xz^2\,dz$$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left[(3x^2+6y)\frac{dx}{dt} - (14yz)\frac{dy}{dt} + (20xz^2)\frac{dz}{dt}\right] dt$$

$x = t \rightarrow dx = dt$ & $\frac{dx}{dt} = 1$

$y = t^2 \rightarrow dy = 2t\,dt$ & $\frac{dy}{dt} = 2t$

$z = t^3 \Rightarrow dz = 3t^2 dt$ & $\frac{dz}{dt} = 3t^2$.

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{x,y,z=0}^{1} \left[(3x^2+6y)(1) - (14yz)(2t) + (20xz^2)(3t^2)\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[(3t^2+6t^2) - (14\cdot t^2\cdot t^3)(2t) + (20\cdot t\cdot t^6)(3t^2)\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[3t^2+6t^2 - 28t^6 + 60t^9\right] dt$$

$$= \left[\frac{3t^3}{3} + \frac{6t^3}{3} - \frac{28t^7}{7} + \frac{60t^{10}}{10}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{3(1)}{3} + \frac{6(1)}{3} - \frac{28(1)}{7} + \frac{60(1)}{10}\right]$$

$$= 1+2-4+6$$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 5.$$

எடுத்துக்காட்டு - 3

$x = 2\sin 3t,\ y = 2\cos 3t,\ z = 8t$ என்ற வளைவரையில் நகரும் துகளின் திசைவேகம் மற்றும் முடுக்கம் அளவுகளின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

திசைவேகம் $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$= \frac{d}{dt}(2\cos 3t)\vec{i} + \frac{d}{dt}(2\cos 3t)\vec{j} + \frac{d}{dt}(8t)\vec{k}$$

$$= 6\cos 3t\,\vec{i} - 6\sin 3t\,\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(6\cos 3t)^2 + (6\sin 3t)^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36\cos^2 3t + 36\sin^2 3t + 64}$$

$|\vec{V}| = \sqrt{36(\cos^2 3t + \sin^2 3t) + 64} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$

$|\vec{V}| = 10.$

மேலும் $\quad \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(6\cos 3t\,\vec{i} - 6\sin 3t\,\vec{j} + 8\vec{k})$

$$= -18\sin 3t\,\vec{i} - 18\cos 3t\,\vec{j}$$

$$\left|\frac{dv}{dt}\right| = \sqrt{18^2\sin^2 3t + 18^2\cos^2 3t}$$

$$= \sqrt{18^2(\sin^2 3t + \cos^2 3t)} = \sqrt{18^2}$$

$$\left|\frac{dv}{dt}\right| = 18.$$

எடுத்துக்காட்டு -4

$\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ & S என்பது $x^2+y^2+z^2=1$ என்ற கோளத்தின் முதல் எண்மம் எனில் $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$-ஐ மதிப்பிடுக.

தீர்வு

$$\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k},$$

$$\phi = x^2+y^2+z^2-1 \Rightarrow \nabla\phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}}$$

$$= \frac{2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = (yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k})\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$= xyz + xyz + xyz$$

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = 3xyz$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_R \vec{F}\cdot\hat{n}\,\frac{dx\,dy}{|\hat{n}\cdot\vec{k}|}$$

$$|\hat{n}\cdot\vec{k}| = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\vec{k} = z.$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_R 3xyz\,\frac{dx\,dy}{z}.$$

$$= 3\iint_R xy\,dy\,dx = 3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx.$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = 3\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (x-x^3)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2-1}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{3}{8}.$$

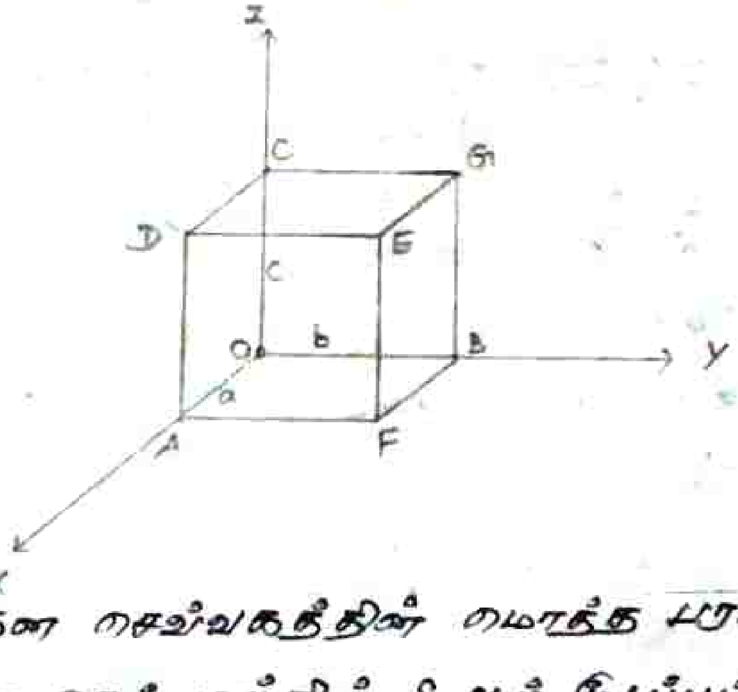
எடுத்துக்காட்டு - 5

$\vec{F} = (x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy\vec{k})$ & S என்பது $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$ எனும் கன செவ்வகம் எனில் காஸ் டைவர்ஜென்ஸ் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு:

காஸ் டைவர்ஜென்ஸ் தேற்றம் ஆனது

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv$$



$S \Rightarrow$ கன செவ்வகத்தின் மொத்த பரப்பு.

$V \rightarrow$ கன செவ்வகத்தின் S-ஆல் மூடப்பட்ட கன அளவு.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \Rightarrow X, Y, Z$ அச்சுகளின் அலகு வெக்டர்கள்.

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 \Rightarrow$ DEFA, CGBO, EGBF, OCDA, DEGC, OAFB ஆகிய பரப்பின் முகங்கள் & $\vec{i}, -\vec{i}, \vec{j}, -\vec{j}, \vec{k}, -\vec{k}$ திசைகளின் வழியான அலகு செங்குத்து வெக்டர்கள்.

காஸ் [illegible] தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv$$

(i) $\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv$

$$\vec{F} = (x^2-yz)\vec{i} + (y^2-zx)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-zx)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2-yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2-zx) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2-xy)$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = 2x + 2y + 2z \quad \& \quad dv = dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv = \iiint_V 2(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\int_0^a\int_0^b\int_0^c (x+y+z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= 2\int_0^a\int_0^b \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right)_0^c dy\,dx$$

$$= 2\int_0^a\int_0^b \left(xc + yc + c^2/2\right) dy\,dx$$

$$= 2\int_0^a \left(xcy + \frac{y^2c}{2} + \frac{c^2y}{2}\right)_0^b dx$$

$$= 2\int_0^a \left(xbc + \frac{b^2c}{2} + \frac{bc^2}{2}\right) dx$$

$$= 2\left(\frac{x^2bc}{2} + \frac{xb^2c}{2} + \frac{xbc^2}{2}\right)_0^a$$

$$= 2\left(\frac{a^2bc + ab^2c + abc^2}{2}\right)$$

$$= \frac{2(abc)(a+b+c)}{2}$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv = abc(a+b+c) \longrightarrow (A)$$

(ii) $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} + \iint_{S_5} + \iint_{S_6}$

(a) $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{DEFA} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-zx)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot\vec{i}\,dydz$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \int_0^c\int_0^b (x^2-yz)\,dy\,dz = \int_0^c\int_0^b (a^2-yz)\,dy\,dz \quad (x=a).$$

$$= \int_0^c \left[a^2y - \frac{y^2z}{2}\right]_0^b dz = \int_0^c \left(a^2b - \frac{b^2z}{2}\right) dz$$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \left[a^2bz - \frac{b^2z^2}{4}\right]_0^c = \left[a^2bc - \frac{b^2c^2}{4}\right] \longrightarrow (1).$$

(b) $$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{CGBO} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(-\vec{i})\,dy\,dz$$

$$= -\int_0^c\int_0^b (x^2-yz)\,dy\,dz = -\int_0^c\int_0^b (-yz)\,dy\,dz \quad (x=0)$$

$$= \int_0^c \left[\frac{zy^2}{2}\right]_0^b dz = \frac{1}{2}\int_0^c b^2z\,dz = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2z^2}{2}\right]_0^c$$

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{b^2c^2}{4} \longrightarrow (2).$$

(c) $$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{EGBF} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(\vec{j})\,dx\,dz$$

$$= \int_0^a\int_0^c (y^2-xz)\cdot dz\,dx = \int_0^a\int_0^c (b^2-xz)\,dz\,dx \quad (y=b)$$

$$= \int_0^a \left[b^2z - \frac{xz^2}{2}\right]_0^c dx = \int_0^a \left(b^2c - \frac{xc^2}{2}\right) dx$$

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \left[xb^2c - \frac{x^2c^2}{4}\right]_0^a = ab^2c - \frac{a^2c^2}{4} \longrightarrow (3).$$

(d) $$\iint_{S_4} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{DCOA} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(-\vec{j})\,dz\,dx$$

$$= \int_0^a\int_0^c -(y^2-xz)\,dz\,dx = \int_0^a\int_0^c -(-xz)\,dz\,dx \quad (y=0)$$

$$= \int_0^a\int_0^c xz\,dz\,dx = \int_0^a \left[\frac{xz^2}{2}\right]_0^c dx = \int_0^a \frac{xc^2}{2}\,dx$$

$$\iint_{S_4} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2c^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2c^2}{4} \longrightarrow (4).$$

(e) $$\iint_{S_5} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{DEGC} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(\vec{k})\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a\int_0^b (z^2-xy)\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^b (c^2-xy)\,dy\,dx \quad (z=c)$$

$$\iint_{S_5} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \int_0^a \left[c^2y - \frac{xy^2}{2}\right]_0^b dx = \int_0^a \left(bc^2 - \frac{xb^2}{2}\right)dx$$

$$= \left[xbc^2 - \frac{x^2b^2}{4}\right]_0^a = abc^2 - \frac{a^2b^2}{4} \longrightarrow (5).$$

(f) $$\iint_{S_6} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{OAFB} \left[(x^2-yz)\vec{i} + (y^2-zx)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}\right]\cdot(-\vec{k})\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a\int_0^b -(z^2-xy)\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^b (xy)\,dy\,dx \quad (z=0)$$

$$= \int_0^a \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^b dx = \int_0^a \frac{xb^2}{2}dx = \left[\frac{x^2b^2}{4}\right]_0^a$$

$$\iint_{S_6} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{a^2b^2}{4} \longrightarrow (6).$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} + \iint_{S_5} + \iint_{S_6} \longrightarrow (7).$$

(1), (2), (3), (4), (5), (6) in (7)

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \left(a^2bc - \frac{b^2c^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2c^2}{4}\right) + \left(ab^2c - \frac{a^2c^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2c^2}{4}\right) + \left(abc^2 - \frac{a^2b^2}{4}\right) + \frac{a^2b^2}{4}$$

$$= a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = abc(a+b+c) \longrightarrow (B).$$

(A) & (B) $\Rightarrow$ $$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv.$$

எனவே கஸ் டைவர்ஜன்ஸ் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது

எடுத்துக்காட்டு-6:

C என்பது வளைவரை $x^2+y^2=4,\ z=2$, $\int_C e^x dx + 2y\,dy - dz$ ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தின் படி மதிப்பிடுக.

தீர்வு: ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் ஆனது

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (e^x dx + 2y\,dy - dz)$$

$\therefore \vec{F} = e^{x}\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^{x} & 2y & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-1) - \frac{\partial}{\partial z}(2y)\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-1) - \frac{\partial}{\partial z}(e^{x})\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{x})\right]$$

$\text{curl}\,\vec{F} = \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(0)$

$\text{curl}\,\vec{F} = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S} \text{curl}\,\vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = 0$

$\therefore \int\limits_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

(ie) $\int\limits_{C} (e^{x}dx + 2y\,dy - dz) = 0$

எடுத்துக்காட்டு - 7:

$\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ எனில் $y = x$ என்ற கோட்டின் மேல் $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பை $(0,0)$ லிருந்து $(1,1)$ வரை காண்க

தீர்வு: $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$; $y = x \Rightarrow dy = dx$.

$\therefore \vec{F} = x^2\vec{i} + x^2\vec{j}$ $(y = x)$; $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + d\ \vec{j}$

$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (x^2\vec{i} + x^2\vec{j})\cdot(dx\vec{i} + dx\vec{j})$

$= x^2dx + x^2dx \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2x^2dx$.

$\int\limits_{y=x} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 2x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2(1/3)$.

$\therefore \int\limits_{y=x} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2/3$.