SEMESTER	: I
CORE COURSE	: I

Inst Hour	: 5
Credit	: 5
Code	: 18K1M01

BASICS, DIFFERENTIAL CALCULUS AND TRIGONOMETRY

UNIT 1:

Sets – Mappings – Equivalence Relations – The Integers – Binary Operations – Partially Ordered Sets.
(Chapter 1 : Sections 1.1 to 1.6 of Text Book 1).
Methods of Successive Differentiation – Leibnitz's Theorem for the n^{th} derivative -Increasing & Decreasing functions, Maxima and Minima for one variable.
(Chapter 3: Sections 1.1-1.6, 2.1, 2.2, Chapter IV Sections 2.1, 2.2 &
Chapter 5: Sections 1.1-1.5 of Text Book 2)

UNIT 2:

Curvature – Radius of curvature in Cartesian & in Polar Coordinates – Centre of curvature – Evolutes & Involutes
(Chapter 10: Sections 2.1 –2.6 of Text Book 2)

UNIT 3:

Expansions of sin(nx), cos(nx), tan(nx) – Expansions of $\sin^n x$, $\cos^n x$ – Expansions of sin(x), cos(x), tan(x) in powers of x and related problems.
(Chapter 1: Sections 1.2 to 1.4 of Text Book 3)

UNIT 4:

Hyperbolic functions – Relation between hyperbolic & Circular functions- Inverse hyperbolic functions.
(Chapter 2: Sections 2.1 & 2.2 of Text Book 3)

UNIT 5:

Logarithm of a complex number -Summation of Trigonometric series-Difference method- Angles in arithmetic progression method –Gregory's Series
(Chapter 3 & Chapter 4 : Sections 4.1,4.2 & 4.4 of Text Book 3)

Text Book(s)

[1] M. L. Santiago, Modern Algebra, Tata McGraw – Hill Publishing Company Limited, 2001.
[2] S.Narayanan,T.K.Manickavasagam Pillai, Calculus Volume I, S.V Publications - 2004
[3] S. Arumugam, Issac & Somasundaram, Trigonometry and Fourier Series New Gamma Publications – 1999 Edition

Books for Reference

[1] S.Arumugam & others, Calculus Volume I.
[2] S.Narayanan, Trigonometry
[3] Ajit Kumar, S.Kumaresan, Bhaba Kumar Sarma, A Foundation Course in Mathematics, Narosa Publishing House.

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

பகுதி - 2

சிறப்பான சார்புகளின் n^{th} வகைக்கெழு :-

(1) $y = e^{ax}$ எனில் y_n - ன் மதிப்பைக் காண்க.

Soln :-

$$y_1 = a e^{ax}$$
$$y_2 = a^2 e^{ax}$$
$$y_n = a^n . e^{ax}$$

(2) $y = (ax+b)^m$, எனில் y_n ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$y_1 = m(ax+b)^{m-1} . a$$
$$y_2 = m(m-1)(ax+b)^{m-2} . a^2$$
$$\vdots$$
$$y_n = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)(ax+b)^{m-n} . a^n.$$

(3) $y = (ax+b)^{-1}$, எனில் y_n - ன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு :

$$y_1 = (-1)\, a\, (ax+b)^{-2}$$
$$y_2 = (-1)(-2)(ax+b)^{-3} . a^2$$
$$\vdots$$
$$y_n = (-1)^n n!\, a^n / (ax+b)^{n+1}.$$

(4) $y = \log(ax+b)$ எனில், y_n - காண்க.

தீர்வு :-

$$y_1 = \frac{1}{(ax+b)} \cdot a = a . (ax+b)^{-1}$$
$$y_2 = a . (-1)(ax+b)^{-2} . a = a^2 . (-1)(ax+b)^{-2}$$
$$\vdots$$
$$y_n = a^n (-1)^{n-1} (n-1)!\, (ax+b)^{-n}.$$

(5) $y = \sin(ax+b)$ எனில், y_n - தீர்வு காண்க.

தீர்வு :

$$y_1 = a\cos(ax+b) = a\sin(\pi/2 + ax + b)$$
$$y_2 = a^2 \cos(\pi/2 + ax + b) = a^2 \sin(2\pi/2 + ax + b)$$
$$\vdots$$
$$y_n = a^n \sin(n\pi/2 + ax + b).$$

(6) $y = \cos(ax+b)$, எனில், y_n காண்க

தீர்வு :

$y_1 = -\sin(ax+b) \cdot a = a \cos(\pi/2 + ax + b)$

$y_2 = a^2 \cos(\pi/2 + ax + b)$

$y_n = a^n \cos(\pi/2 + ax + b)$

---

(7) $y = e^{ax} \sin(bx+c)$ எனில் y_n மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$Y_1 = e^{ax} \cos(bx+c) + a \cdot e^{ax} \sin(bx+c)$

$a = r\cos\theta \quad ; \quad b = r\sin\theta$

$r = \sqrt{a^2+b^2} \quad \theta = \tan^{-1}(b/a)$

$a^2 + b^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$

$Y_1 = e^{ax}(r\sin\theta \cos(bx+c) + r\cos\theta \sin(bx+c))$

$= r \cdot e^{ax}(\sin(\theta + bx + c))$

$Y_2 = r^2 \cdot e^{ax}(\sin(2\theta + bx + c))$

$\vdots$

$Y_n = r^n \cdot e^{ax}(\sin(n\theta + bx + c))$

---

(8) $Y = \cos 3x$ எனில், Y_n-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$Y = \cos 3x \qquad \left[Y_n = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)\right]$

$Y_n = 3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

---

(9) $y = \sin^2 x$, எனில் Y_n - காண்க.

தீர்வு :

$y = \sin^2 x$

$Y_n = -1/2\,[2^n \cos(n\pi/2 + 2x)] \qquad \left[\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right]$

$= -2^{n-1} \cos(n\pi/2 + 2x)$

---

(10) $Y = \sin 4x \cos x$, எனில் Y_n - ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு :

$\left[2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$

$Y = \sin 4x \cos x$

$= \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin 3x)$

$Y_n = \frac{1}{2}\left[5^n \sin(n\pi/2 + 5x) + 3^n \sin(n\pi/2 + 3x)\right]$

---

(11) $y = \frac{3}{(2x-1)(x+1)}$ எனில், y_n -ன் மதிப்பை காண்க.

Soln :-

$$y = \frac{3}{(2x-1)(x+1)}$$

$$\frac{3}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$3 = A(x+1) + B(2x-1)$$

$$x = -1 \Rightarrow B = -1 \; ; \; x = 1/2 \Rightarrow A = 2$$

$$y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore y_n = \frac{2(-1)^n \cdot 2^n n!}{(2x-1)^{n+2}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

---

(12) $\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}$ -ன் n வது வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு: $y = x^2/(x+2)(x-1)^2$

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)}$$

$$x^2 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

$$x = 1 \Rightarrow B = 1/3 \; ; \; x = -2 \Rightarrow C = 4/9 \; ; \; x = 0 \Rightarrow A = 5/9.$$

$$y = \frac{5}{9}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{(x+2)}$$

$$y_n = \frac{5}{9}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n+1!}{3(x-1)^{n+2}} + \frac{4}{9}\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+2}}$$

---

(13) $y = 1/x^2+a^2$ எனில், y_n -ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு: $\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{(x+ia)(x-ia)}$

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{A}{x+ia} + \frac{B}{x-ia}$$

$$1 = A(x-ia) + B(x+ia)$$

$$x = ia \Rightarrow B = 1/2ia \; ; \; x = -ia \Rightarrow A = -1/2ia$$

$$y = \frac{-1/2ia}{(x+ia)} + \frac{1/2ia}{(x-ia)}$$

$$y_n = \frac{-1(-1)^n n!\, i^n}{2ia(x+ia)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!\, i^n}{2ia(x-ia)^{n+1}}$$

---

(14) $\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$ -ன் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

(i) தீர்வு :

$$\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \log(x+a) - \log(x-a)$$

$$D^n\left[\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)\right] = D^n[\log(x+a)] - D^n[\log(x-a)]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-a)^n}$$

(ii) $\cos^3 2x$ -ன் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க

தீர்வு :

$$D^n[\cos^3 2x] = D^n\left[\frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\right]$$

$$= 3/4\, D^n(\cos x) + 1/4\, D^n(\cos 3x)$$

$$= 3/4 \cos(x + n\pi/2) + 1/4\, 3^n \cos(3x + n\pi/2)$$

---

(15) $\cos x \cos 2x \cos 3x$ -ன் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு :

$$\left[\cos A \cos B = 1/2[\cos(A+B) + \cos(A-B)]\right]$$

$$y = \cos x \cos 2x \cos 3x$$

$$= 1/2 \cos 2x[\cos 6x + \cos 2x]$$

$$= 1/2[\cos 6x + \cos 2x] + 1/2\cos^2 2x$$

$$= 1/4(\cos 2x + \cos 6x) + 1/4(1 + \cos 4x)$$

$$= 1/4 + 1/4(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$$

$$D^n(\cos x \cos 2x \cos 3x) = 1/4\{2^n \cos(n\pi/2 + 2x) + 4^n \cos(n\pi/2 + 4x) + 6^n \cos(n\pi/2 + 6x)\}$$

---

(16) $\cos^5\theta \sin^7\theta$ -ன் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு :

$$x = \cos\theta + i\sin\theta \quad ; \quad 1/x = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$x + 1/x = 2\cos\theta \quad ; \quad x - 1/x = 2i\sin\theta$$

$$x^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad ; \quad 1/x = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$x^n + 1/x^n = 2\cos n\theta \quad ; \quad x^n - 1/x^n = 2i\sin n\theta$$

$$2^5 \cos^5\theta = (x + 1/x)^5 \quad ; \quad 2^7 i^7 \sin^7\theta = (x - 1/x)^7$$

$$\therefore 2^{12} i^7 \cos^5\theta \sin^7\theta = (x + 1/x)^5 (x - 1/x)^7$$

$$= (x + 1/x)^5 (x - 1/x)^5 (x - 1/x)^2$$

$$= (x^2 - 1/x^2)^5 (x - 1/x)^2$$

$= \left(x^{10} - 5x^6 + 10x^2 - \frac{10}{x^2} + \frac{5}{x^6} - \frac{1}{x^{10}}\right)\left(x^2 - 2 + 1/x^2\right)$

$= [x^{12} - 2x^{10} + 2x^6 - x^4 - 4x^8 + 8x^6 - 8x^2 + 4 + 6x^4 -$
$12x^2 + 12/x^2 - 6/x^4 - 4 + 8/x^2 - 8/x^6 + 4/x^8 +$
$1/x^4 - 2/x^6 + 2/x^{10} - 1/x^{12}]$

$= (x^{12} - 1/x^{12}) - 2(x^{10} - 1/x^{10}) - 4(x^8 - 1/x^8) + 10(x^6 - 1/x^6)$
$+ 5(x^4 - 1/x^4) - 20(x^2 - 1/x^2)$

$= 2i\sin 12\theta - 2(2i\sin 10\theta) - 4(2i\sin 8\theta) + 10(2i\sin 6\theta)$
$+ 5(2i\sin 4\theta) - 20(2i\sin 2\theta)$

2i - ஆல் இரண்டு பக்கமும் வகுக்க

$-2^{11}\cos^5\theta\sin^7\theta = \sin 12\theta - 2\sin 10\theta - 4\sin 8\theta +$
$10\sin 6\theta + 5\sin 4\theta - 20\sin 2\theta$.

$D^n(\cos^5\theta\sin^7\theta) = -1/2^{11}\{12^n\sin(n\pi/2 + 12\theta) - 10^n 2\sin(n\pi/2 + 10\theta)$
$- 8^n 4\sin(n\pi/2 + 8\theta) + 6^n 10\sin(n\pi/2 + 6\theta) +$
$4^n 5\sin(n\pi/2 + 4\theta) - 2^n 20\sin(n\pi/2 + 2\theta)\}$.

வகைக்கெழு கொண்ட சம்பந்தப்பட்ட தேற்றங்கள் :-

① $xy = ae^x + be^{-x}$ எனில், $x\, d^2y/dx^2 + 2\, dy/dx - xy = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு :- $xy = ae^x + be^{-x}$

'x' ஐ பொறுத்து இருபுறமும் வகைக்கெழு காணவேண்டும்.

$x\, dy/dx + y = ae^x - be^{-x}$

மீண்டும் 'x' ஐ பொறுத்து இருபுறமும் வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$x\, d^2y/dx^2 + dy/dx + dy/dx = ae^x + be^{-x}$

$x\, d^2y/dx^2 + 2\, dy/dx = xy$

$\therefore x\, d^2y/dx^2 + 2\, dy/dx - xy = 0$

---

② $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ எனில், $(1-x^2)y_2 - xy_1 + M^2 y = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $y = \sin(m\sin^{-1}x)$

$\sin^{-1}y = M\sin^{-1}x$

'x' ஐ பொறுத்து இருபுறமும் வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx} = M\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sqrt{1-x^2}\, dy/dx = M\cdot\sqrt{1-y^2}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தவும்

$(1-x^2)(dy/dx)^2 = M^2(1-y^2)$

மீண்டும் 'x' ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$(1-x^2)2(dy/dx)(d^2y/dx^2) + (dy/dx)^2\cdot(-2x) = -M^2 2y\, dy/dx$

$2\, dy/dx$ - ஆல் இரண்டு பக்கமும் வகுக்க

$(1-x^2)\, d^2y/dx^2 - x\, dy/dx = -m^2 y$

$\therefore (1-x^2) y_2 - x y_1 + m^2 y = 0$

(2) $x = \sin\theta$, $y = \cos p\theta$ எனில் $(1-x^2)y_2 - xy_1 + p^2 y = 0$ என நிறுவுக

தீர்வு :

$dx/d\theta = \cos\theta$; $dy/d\theta = -p\sin\theta$; $dy/dx = -\dfrac{p\sin\theta}{\cos\theta}$

$x = \sin\theta \Rightarrow x^2 = \sin^2\theta \Rightarrow 1 - x^2 = 1 - \sin^2\theta \Rightarrow 1 - x^2 = \cos^2\theta$

$\therefore \sqrt{1-x^2} = \cos\theta$

$y = \cos p\theta \Rightarrow y^2 = \cos p^2\theta \Rightarrow 1 - y^2 = 1 - \cos p^2\theta \Rightarrow 1 - y^2 = \sin p^2\theta$

$\therefore \sqrt{1-y^2} = \sin p\theta$

$dy/dx = -\dfrac{p\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\, dy/dx = -p\sqrt{1-y^2}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$(1-x^2)(d^2y/dx)^2 = p^2(1-y^2)$

'x' ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$(1-x^2)\, 2\, (dy/dx)(d^2y/dx^2) + (dy/dx)^2(-2x) = -p^2\, 2y\, dy/dx$

$2(dy/dx)$ - ஆல் இருபுறமும் வகுக்க

$(1-x^2)\, d^2y/dx^2 - x(dy/dx) = -p^2 y$

$(1-x^2) y_2 - xy_1 + p^2 y = 0$.

லெபினிஸ் தேற்றம் - $n^{வது}$ வகைக்கெழுவாறு :-

இங்கு x என்பது u மற்றும் v ன் சார்புகள்,

n என்பது மிகை முழு எண் எனில்,

$D^n(uv) = u_n v + nc_1 u_{n-1} v_1 + \cdots + nc_r u_{n-r} v_r + \cdots + u v_n$.

(1) $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ எனில் $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$

தீர்வு :

$\underbrace{y = \sin(m\sin^{-1}x)}_{(1)} \Rightarrow \sin^{-1} y = m\sin^{-1}x \rightarrow (2)$

'x' - ஐப் பொறுத்து (2) - வகைக்கெழு காணவேண்டும்.

$\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\dfrac{dy}{dx} = m \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$(1-x^2)(dy/dx)^2 = m^2(1-y^2)$

மீண்டும் 'x' ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்.

$(1-x^2)\, d^2y/dx^2 - x \cdot dy/dx = -m^2 y$

$(1-x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$

$(1-x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0 \rightarrow (3)$

லெபினிஸ் தேற்றத்தை (3)-ல் பயன்படுத்த.

$(1-x^2)y_{n+2} + nc_1\, y_{n+1}(-2x) + nc_2(-2)y_n -$

$(xy_{n+1} + nc_1 y_n) + m^2 y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(-2)y_n -$

$(xy_{n+1}) - (ny_n) + m^2 y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)x\,y_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$

---

(2) $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ எனில்

$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x\,y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு :- $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$

'x' ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$y_1 = -a\sin(\log x)\cdot 1/x + b\cos(\log x)\cdot 1/x$

$xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$

மீண்டும் 'x' ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்.

$xy_2 + y_1 = -a\cos(\log x)\cdot 1/x - b\sin(\log x)\cdot 1/x$

$xy_2 + y_1 = -1/x(a\cos(\log x)) + b\sin(\log x))$

$x^2y_2 + xy_1 = -y$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

லெபினிட்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தவும்

$x^2y_{n+2} + nc_1\, y_{n+1}2x + nc_2\, y_n(2) + xy_{n+1} + nc_1 y_n + y_n = 0$

$x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$

$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

---

(3) $y = (x+\sqrt{1+x^2})^m$, எனில்

$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு :- $y = (x+\sqrt{1+x^2})^m \rightarrow (1)$

'x' ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$y_1 = m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1} + \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,2x\right)$

$\sqrt{1+x^2}\, y_1 = m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}$

$\sqrt{1+x^2}\, y_1 = my$ (சமன்பாடு (1)-ல் பொருத்த)

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தவும்

$(1+x^2)y_1^2 = m^2y^2$

'x' ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$(1+x^2)2y_1y_2 + y_1^2(2x) = 2m^2yy_1$

$2y_1$ ஆல் வகுக்கவும்

$$(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0.$$

லெப்னிட்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தவும்

$$(1+x^2)y_{n+2} + nc_1\, y_{n+1}(2x) + nc_2\, y_n(2) + xy_{n+1} + nc_1\, y_n - m^2 y_n = 0$$

$$(1+x^2)y_{n+2} + 2nx\, y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}\, 2y_n + xy_{n+1} + ny_n - m^2 y_n = 0$$

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)x\, y_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0.$$

---

(4) $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$, எனில்,
$(x^2-1)y_{n+2} + (n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு :- $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x \rightarrow (1)$

'x' ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$y^{1/m} = z \quad ; \quad y^{-1/m} = 1/z$

$(1) \Rightarrow z + 1/z = 2x \; ; \quad \frac{z^2+1}{z} = 2x$

$z^2 + 1 = 2zx \Rightarrow z^2 - 2zx + 1 = 0$

$$z = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = \frac{2(x \pm \sqrt{x^2-1})}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}.$$

$y^{1/m} = (x \pm \sqrt{x^2-1}) \Rightarrow y = (x \pm \sqrt{x^2-1})^{1/m} \rightarrow (2)$

(2)-ஐ 'x' ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணவேண்டும்.

$$y_1 = M(x \pm \sqrt{x^2-1})^{M-1}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= M(x \pm \sqrt{x^2-1})^{M-1}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= M(x \pm \sqrt{x^2-1})^{M-1}\left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$y_1 = \frac{M(x \pm \sqrt{x^2-1})^M}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$(\sqrt{x^2-1})y_1 = M(x \pm \sqrt{x^2-1})^m$

$(\sqrt{x^2-1})y_1 = My$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தவும்

$(x^2-1)y_1^2 = M^2y^2$

'x' ஐப் பொறுத்து இருபுறமும் வகைக்கெழு காணவேண்டும்

$(x^2-1)2y_1y_2 + y_1^2(2x) = M^2\,2yy_1$

லெப்னிட்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தவும்.

$$(x^2-1)y_{n+2} + nc_1\, y_{n+1}(2x) + nc_2\, y_n(2) + xy_{n+1} + nc_1\, y_n - m^2 y_n = 0$$

$$(x^2-1)y_{n+2} + 2nx\, y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)y_n + xy_{n+1} + ny_n - m^2 y_n = 0$$

$$(x^2-1)y_{n+2} + (n+1)xy_{n+1} + (n^2-M^2)y_n = 0.$$

உதாரணக் கணக்குகள்:-

① $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6$ என்னும் சார்பு, $x > 2$ என்றிருக்கும் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஏறு முகமாயும் என நிறுவுக.

தீர்வு :- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$x > 2$ என்றிருக்கும் நிலையில், $f'(x)$ நேர்மறையாகும்

$\therefore f(x)$ சார்பு ஏறுமுகமானதாகும், $x > 2$ என்றிருக்கும் போது.

$$f(2) = 8 - 12 + 6 = 2$$

$$f'(2) = 8 - 12 + 6 = 2$$

$\therefore$ $x > 2$, $f(x)$ ம் நேர்மறையாகும்.

---

② x-ன் எந்த மதிப்பானது $2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ ன் ஒரு குறையும் சார்பாகும்.

தீர்வு :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

3 ஆல் வகுக்கவும்

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad (or) \quad x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = 1} \quad (or) \quad \boxed{x = 2}$$

'x' ன் மதிப்பானது 1 மற்றும் 2 க்கு இடைப்பட்டு இருந்தால், $f'(x)$ ஆனது எதிர்மறையாகும். மற்றும் $f(x)$ ஆனது குறையும் சார்பாகும்.

---

③ $x > 0$, எனில் $x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < x$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$f(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < x$$

$$f(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 - \log(1+x)$$

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{1(1+x) - x(1+x) - 1}{(1+x)}$$

$$= \frac{1 + x - x - x^2 + 1}{(1+x)}$$

$$= \frac{-x^2}{1+x}$$

'x' நேர்மறையாகும் போது $f'(x)$ ம் எதிர்மறையாகும்.

$\therefore$ $f(x)$ ம் குறைவான சார்பாகும்.

$f(x)$ ன் மதிப்பானது, $x = 0$ எனும் போது 0

$f(x)$ ம் எதிர்மறையாகும்.

$$x - \frac{1}{2}x^2 - \log(1+x)$$

$$\therefore x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x)$$

$$F(x) = \log(1+x) < x$$

$$F(x) = \log(1+x) - x$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$$

$$= \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

$\therefore$ 'x' நேர்மறையாகும் போது, $f'(x)$ ம் எதிர்மறையாகும்.

$\therefore$ $f(x)$ ம் குறைவான சார்பாகும்.

$$F(0) = 0$$

$x > 0$, $F(x)$ ம் எதிர்மறையாகும்.

$$\therefore \log(1+x) - x < 0$$

$$\therefore \log(1+x) < x$$

இதனால், $x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < x$.

பகுதி - II

வளைவரை மற்றும் வளைவரையின் ஆரம் :-

இரு வட்டங்கள் படம் - 2 லிருந்து எடுத்துக் கொள்க. இரு வட்டங்களின் வளைவு அல்லது வளைவரை பொதுவாக இரு வட்டங்களில் ஒரே இடத்தில் இருப்பது இல்லை. சிறிய மீதுள்ள புள்ளி P ஒரே இடத்தில் இருப்பது இல்லை. சிறிய வட்டத்தின் வளைவரை பெரிய வட்டத்தினை விட அதிகமான திசை மாற்றம் இருக்கும். வேறு மாதிரியான சிறிய வட்டமானது சிறப்பான வளைவரை பெற்றிருக்கும்.

ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் வளைவரை :-

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளியின் வளைவரை அதனுடைய ஆரத்தின் தலைகீழிக்கு சமமாகும். அதனுடைய ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் வளைவரை மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் வளைவரை ஆரமானது ஏதேனும் வளைவரை -யின் வளைவு ஆகும். இதனை ρ என குறிப்பர்.

வளைவரை ஆரத்தின் சூத்திரம் :-

கார்டீசியன் சூத்திரம் :-

$$\rho = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

(அல்லது)

$$\rho = \frac{\left[1 + y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}$$

---

(1) $x^4 + y^4 = 2$ என்ற வளைவரைக்கு $(1,1)$ என்ற புள்ளியடத்து ஆரம் வளைவு ஆரம் காண்.

தீர்வு :- $x^4 + y^4 = 2$

'x' ஐ பொறுத்து வகைகெழு காணவேண்டும்

$$4x^3 + 4y^3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y^3 \frac{dy}{dx} = -4x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3}{4y^3} = -\frac{x^3}{y^3}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{[3y^3x^2 - 3x^3y^2 \cdot dy/dx]}{y^6}$$

$$= -\frac{3y^2[yx^2 + x^3]}{y^6} = -\frac{3}{y^4}(yx^2 + x^3)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(1,1)} = -\frac{3}{1}(1+1) = -6$$

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} = \frac{[1 + (-1)^2]^{3/2}}{-6}$$

$$= \frac{(1+1)^{3/2}}{-6} = \frac{2^{3/2}}{-6} = \frac{2^1 \cdot 2^{1/2}}{-6} = \frac{2^{1/2}}{-3}.$$

$\therefore \rho = \sqrt{2}/3.$

---

(2) வளைவரை கோட்டின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலானது சங்கிலி தொடரின் $y = c\cosh x/c$ ன் வளைவின் ஆரம், இவ்வளவு குறிக்கும் சமம் என காட்டு.

தீர்வு :-

$$y = c\cosh x/c$$

$$y_1 = c\sinh x/c \cdot 1/c$$

$$y_1 = \sinh x/c.$$

$$y_2 = \cosh x/c \cdot 1/c$$

$$y_2 = 1/c \cosh x/c.$$

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

$$= \frac{[1 + (\sinh x/c)^2]^{3/2}}{1/c \cdot \cosh x/c}$$

$$= \frac{c[\cosh^2 x/c]^{3/2}}{\cosh x/c} = \frac{c[\cosh x/c]^3}{\cosh x/c}$$

$$= c[\cosh x/c]^2$$

$$= c[y/c]^2$$

$$= c[y^2/c] = y^2/c \rightarrow (1)$$

$$= y\,[1+(dy/dx)^2]^{3/2}$$

$$= c\,[\cosh x/c]\,[1+(\sinh x/c)^2]^{1/2}$$

$$= c\,[\cosh x/c]\,[\cosh^2 x/c]^{1/2}$$

$$= c\,[\cosh x/c]\sqrt{\cosh^2 x/c}$$

$$= c\,[\cosh x/c]\cosh x/c$$

$$= y \times y/c$$

$$= y^2/c \rightarrow (2)$$

(1) & (2) - ன் மூலமாக

$\therefore$ வளைவு ஆரம் = செங்கோட்டின் நீளம்

---

(3) ஒரு வளைவரையின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $x = f(\theta)$, $y = \phi(\theta)$, எனில் வளைவரையின் $1/\rho = x'y'' - y'x'' / (x'^2 + y'^2)^{3/2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$dy/dx = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{y'}{x'}$$

$$d^2y/dx^2 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{y'}{x'}\right)\cdot\frac{1}{dx/d\theta}$$

$$= \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2}\cdot\frac{1}{x'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\dfrac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}}{[1+(y'/x')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\dfrac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}}{\dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{(x'^2)^{3/2}}}$$

$$= \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3} \cdot \frac{(x')^3}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

---

(3) ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் $x = a(\theta + \sin\theta)$ மற்றும் $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருவின் வளைவின் வளைவு ஆரம் $4a \cos \theta/2$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$x = a(\theta + \sin\theta) \quad y = a(1 - \cos\theta)$

$x' = a(1 + \cos\theta) \quad y' = a(\theta + \sin\theta)$

$x'' = a(\theta - \sin\theta) \quad y'' = a\cos\theta$

$x'' = -a\sin\theta$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{a(1+\cos\theta)(a\cos\theta) - a(\theta + \sin\theta)(-a\sin\theta)}{[(a(1+\cos\theta))^2 + (a\sin\theta)^2]}$$

$$= \frac{a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{[a^2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta)]}$$

$$= \frac{a^2\cos\theta + a^2}{a^3(2 + 2\cos\theta)^{3/2}} = \frac{a^2(1+\cos\theta)}{a^3[2(1+\cos\theta)]^{3/2}}$$

$$= \frac{a^2(1+\cos\theta)}{a^3[2(1+\cos\theta)]^{3/2}} = \frac{2\cdot\cos^2\theta/2}{a(2\cdot 2\cos^2\theta/2)}$$

$$= \frac{2\cos^2\theta/2}{a(4\cos^2\theta/2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4a\cos\theta/2}$$

$\rho = 4a\cos\theta/2$

குறிப்பு :-

ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் வளைவரை (வளைவரையின் ஆரம்) x மற்றும் y அச்சை சார்ந்திருக்கும், x மற்றும் y ஐ ஒன்றுக்கொன்று மாற்றும் போது ρ ஆனது

$$\rho = \frac{\left[1 + (dx/dy)^2\right]^{3/2}}{d^2x/dy^2}$$

இந்த வாய்ப்பாடானது dy/dx முடிவிலி ஆக இருக்கும் போது பயன்படும்.

---

(1) $y^2 = x^3 + 8$ என்ற வளைவரைக்கு $(-2,0)$ என்ற புள்ளியிடத்து ஆர வளைவு ஆரம் காண்.

தீர்வு :-

$$y^2 = x^3 + 8 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,0)} = \frac{3(-2)^2}{2(0)} = \frac{12}{0} = \infty$$

நமக்கு கிடைத்த மதிப்பானது dy/dx at $(-2,0)$ ல் ∞

அதனால், ρ - வை கண்டுபிடிக்க, ρ வின் வாய்ப்பாடு மாறும்.

$$\rho = \frac{\left[1+(dx/dy)^2\right]^{3/2}}{d^2x/dy^2} \; ; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{3x^2} \; ; \left(\frac{dx}{dy}\right)_{(-2,0)} = \frac{0}{12} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2 \cdot 2 - 2y \cdot 6x \cdot dx/dy}{9x^4}$$

$$= \frac{3(-2)^2 \cdot 2 - 2(0)\,6(-2)\cdot 0}{9(-2)^4} = \frac{12}{72} = 1/6$$

$$\rho = \frac{\left[1 + (dx/dy)^2\right]^{3/2}}{d^2x/dy^2} = \frac{[1+0]^{3/2}}{1/6} = 6$$

$\rho = 6$.

வளைவரையின் மையத்தின் ஆயம் :-

வளைவரையின் $(C(\bar{x}, \bar{y}))$ ஆனது $p(x,y)$ என்ற புள்ளியின் வளைவரையின் மையம் எனில்

$$\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1^2)$$

$$\bar{y} = y_1 + \frac{(1 + y_1^2)}{y_2}$$

<u>வளைவரை மையத்தின் சமன்பாடு :-</u>

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \rho^2 .$$

---

① $xy = 2$ என்ற வளைவரைக்கு $(2,1)$ என்ற புள்ளியிடத்து வளைவு மையத்தின் ஆயத்தொலைவுகளை காண்க.

தீர்வு :-

$$xy_1 + y(1) = 0$$

$$y_1 = -y/x \Rightarrow y_{1(2,1)} = -1/2 .$$

$$y_2 = -\left[\frac{xy_1 - y(1)}{x^2}\right] \Rightarrow y_{2(2,1)} = -\left[\frac{2(-1/2) - 1}{4}\right].$$

$$y_2 = 2/4 = 1/2$$

$$x = \frac{2 - (-1/2)[1 + (-1/2)^2]}{1/2} = \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4}.$$

$$y = \frac{1 + (1 + 1/4)}{1/2} = \frac{1 + 5/4}{1/2} = 1 + \frac{5}{2} = 7/2$$

$\therefore$ வளைவரையின் மையம் $(x, y) = (13/4, 7/2)$.

---

② பரவளையம் $y^2 = 4ax$ இன் t என்ற புள்ளியில் $\rho = -2a(1+t^2)^{3/2}$, $x = 2a + 3at^2$, $y = -2at^3$ எனக்காட்டு. மேலும், எவல்யூட் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு :-

$$x = at^2 \Rightarrow dx/dt = 2at .$$

$$y = 2at \Rightarrow dy/dt = 2a$$

$$y_1 = dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

$$y_2 = d^2y/dx^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{2at}\right) = (-1)t^{-1-1}\frac{1}{2at} = -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2at}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2at^3}$$

$$\rho = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} = \frac{[1+(1/t^2)]^{3/2}}{-1/2at^3}$$

$$= -2at^3[1+1/t^2]^{3/2} = \frac{-2at^3(1+t^2)^{3/2}}{t^3}$$

$$= -2a(1+t^2)^{3/2}$$

$$X = \frac{x - y_1(1+y_1^2)}{y_2} = \frac{at^2 + 1/t\,[1+(1/t)^2]}{1/2at^3}$$

$$X = at^2 + (t^2+1)2a = at^2 + 2at^2 + 2a$$

$$Y = \frac{y + (1+y_1^2)}{y_2} = 2at - \frac{(1+1/t^2)}{1/2at^3}$$

$$= 2at - (t^2+1)2at = 2at - 2at^3 + 2at$$

$$Y = -2at^3.$$

∴ வளைவரைத்தின் மைய அமைவானது $(2a+3at^2, -2at^3)$ ஆகும்.

$$X = 2a + 3at^2 \qquad Y = -2at^3$$

$$3at^2 = x - 2a \qquad Y = -2a(t^2)^{3/2}$$

$$t^2 = \frac{x-2a}{3a} \qquad Y = -2a\left(\frac{x-2a}{3a}\right)^{3/2}$$

$$Y = -2a\left(\frac{x-2a}{3a}\right)^{3/2} \Rightarrow y^2 = \frac{4}{27a}(x-2a)^3.$$

$$\Rightarrow (27a)y^2 = 4(x-2a)^3.$$

செங்கோட்டு வரைவு ஆகும்.

---

3. $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$ என்ற அழுர்ச்சவரை-யின் செங்கோட்டுத் தொகுவு மற்றொரு அழுர்ச்சவரையாகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :-

$x = a(\theta - \sin\theta)$ $\qquad$ $y = a(1-\cos\theta)$

$dx/d\theta = a(1-\cos\theta)$ $\qquad$ $dy/d\theta = a\sin\theta$

$$dy/dx = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{a\cdot 2\sin\theta/2\cos\theta/2}{a\cdot 2\sin^2\theta/2} = \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}$$

$$y_1 = dy/dx = \cot\theta/2$$

$$y_2 = d^2y/dx^2 = \frac{d}{d\theta}(\cot\theta/2)\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2\theta/2\cdot\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{a(2\sin^2\theta/2)}$$

$$y_2 = -\frac{1}{\sin^2\theta/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a(2\sin^2\theta/2)} = -\frac{1}{4a\sin^4\theta/2}.$$

$$X = \frac{x - y_1(1+y_1^2)}{y_2} = \frac{a(\theta-\sin\theta) - (\cot\theta/2)(1+\cot\theta/2)^2}{-1/4a\sin^4\theta/2}$$

$$= a(\theta-\sin\theta) + \left(\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\right)\left(1+\frac{\cos^2\theta/2}{\sin^2\theta/2}\right)(4a\sin^4\theta/2).$$

$$= a(\theta-\sin\theta) + 4a\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2$$

$$= a(\theta-\sin\theta) + 2a\sin\theta.$$

$$X = a[\theta+\sin\theta].$$

$$Y = y + \frac{(1+y_1^2)}{y_2} = a(1-\cos\theta) + \frac{1+\cot^2\theta/2}{-1/4a\sin^4\theta/2}$$

$$= a(1-\cos\theta) - 4a\sin^4\theta/2\cdot\frac{1}{\sin^2\theta/2}$$

$$= a(1-\cos\theta) - 4a\sin^2\theta/2$$

$$= a(1-\cos\theta) - 2a(1-\cos\theta)$$

$$Y = a(1-\cos\theta)$$

$$X = a[\theta+\sin\theta]\ ;\ Y = -[a(1-\cos\theta)]$$

வளைவு ஆரங்கள் மற்றும் உள் வளைவரைகள் :-

ஒரு வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் புள்ளியில் வரைந்த வளைவு மையத்தின் தொலைவானது வளைவு ஆரம் எனப்படும். மற்றும் அந்த வளைவரைக்கு இத்தகைய வளைவரையின் உள் குவிவரை எனப்படும்

(1) $r = a(1-\cos\theta)$-ன் வளைவு ஆரமானது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் $\sqrt{r}$ க்கு விகிதசமம் என நிறுவு.

தீர்வு :- $r = a(1-\cos\theta) \rightarrow (1)$

'θ' பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க

$$\frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta \qquad \frac{d^2r}{d\theta^2} = a\cos\theta$$

$$\rho = \frac{(r^2+r_1^2)^{3/2}}{r^2+2r_1^2-rr_2}$$

$$= \frac{[a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]^{3/2}}{a^2(1-\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta-a(1-\cos\theta)\cdot a\cos\theta}$$

$$= \frac{a^3[1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta]^{3/2}}{a^2[1-2\cos\theta+\cos^2\theta+2\sin^2\theta-\cos\theta+\cos^2\theta]}$$

$$= \frac{a(2-2\cos\theta)^{3/2}}{(3-3\cos\theta)} = \frac{a\,2\sqrt{2}\,(1-\cos\theta)^{3/2}}{3(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\,a\sqrt{\frac{r}{a}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{a}}{3}\sqrt{r}.$$

(2) $r^n = a^n\cos n\theta$ என்ற வளைவரைக்கு வளைவு ஆரம் $\dfrac{a^n r^{-n+1}}{n+1}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :-

$$r^n = a^n\cos n\theta$$

இருபுறமும் log எடுக்கவும்

$$\log r^n = \log a^n \cos n\theta$$

$$n \log r = \log a^n + \log \cos n\theta$$

'θ' சார்ந்து வகைக்கெழு காணவும்

$$\frac{n}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = -\frac{n \sin n\theta}{\cos n\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \tan n\theta .$$

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = -\frac{dr}{d\theta} \tan n\theta - n r \sec^2 n\theta$$

$$= r \tan^2 n\theta - n r \sec^2 n\theta$$

$$\rho = \frac{\{ r^2 + (dr/d\theta)^2 \}^{3/2}}{r^2 + 2(dr/d\theta) - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}$$

$$= \frac{| r^2 + r^2 \tan^2 n\theta |^{3/2}}{r^2 + 2r^2 \tan^2 n\theta - r^2 \tan^2 n\theta + n r^2 \sec^2 n\theta}$$

$$= \frac{r^3 \sec^3 n\theta}{r^2 + r^2 \tan^2 n\theta + n r^2 \sec^2 n\theta}$$

$$= \frac{r \sec^3 n\theta}{\sec^2 n\theta + n \sec^2 n\theta} .$$

$$= \frac{r a^n}{(1+n) r^n}$$

$$= \frac{a^n r^{-n+1}}{(n+1)}$$

பகுதி - 3

திரிகோணமிதி

திரிகோணமிதி முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்களை கண்டுபிடிக்க மட்டுமே பயன்படுத்தப்பட்டது. இப்போது எல்லா துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எல்லா உயர்மட்ட கல்விக்கும் திரிகோணமிதியின் அடிப்படைக் கொள்கைகளும் அதன் விரிவும் இன்றியமையாதவைகளாக இருக்கின்றன.

$\sin n\theta$, $\cos n\theta$, $\tan n\theta$ காண :-

தேற்றம் :-

(i) $\cos n\theta = \cos^n\theta - nc_2 \cos^{n-2}\theta \sin^2 + \dots$

(ii) $\sin n\theta = n\cos^{n-1}\theta \sin\theta - nc_3 \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + \dots$

(iii) $\tan n\theta = \dfrac{nc_1 \tan\theta - nc_3 \tan^3\theta + \dots}{1 - nc_2 \tan^2\theta + nc_4 \tan^4\theta - \dots}$

எடுத்துக்காட்டுகள் :-

① $\dfrac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 7 - 56\sin^2\theta + 112\sin^4\theta - 64\sin^6\theta$.

என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$(\cos 7\theta + i\sin 7\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^7$

$= \cos^7\theta + 7c_1 \cos^6\theta (i\sin\theta) + 7c_2 \cos^5\theta (i\sin\theta)^2$
$+ 7c_3 \cos^4\theta (i\sin\theta)^3 + 7c_4 \cos^3\theta (i\sin\theta)^4 +$
$7c_5 \cos^2\theta (i\sin\theta)^5 + 7c_6 \cos\theta (i\sin\theta)^6 +$
$7c_7 (i\sin\theta)^7$.

$= \cos^7\theta + 7i\cos^6\theta \sin\theta - 21\cos^5\theta \sin^2\theta -$
$35i\cos^4\theta \sin^3\theta - 35\cos^4\theta \sin^3\theta +$
$35\cos^3\theta \sin^4\theta + 21i\cos^2\theta \sin^5\theta -$
$7\cos\theta \sin^6\theta - i\sin^7\theta$.

இருபுறமும் கற்பனை பகுதிகளை ஒப்பிடுக.

$$\sin 7\theta = 7\cos^6\theta \sin\theta - 35\cos^4\theta \sin^3\theta + 21\cos^2\theta \sin^5\theta - \sin^7\theta.$$

$$\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 7\cos^6\theta - 35\cos^4\theta \sin^2\theta + 21\cos^2\theta \sin^4\theta - \sin^6\theta.$$

$$= 7(1-\sin^2\theta)^3 - 35(1-\sin^2\theta)^2 \sin^2\theta + 21(1-\sin^2\theta)\sin^4\theta - \sin^6\theta.$$

$$= 7(1-\sin^6\theta - 3\sin^2\theta + 3\sin^4\theta) - 35(1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta)\sin^2\theta + 21(1-\sin^2\theta)\sin^4\theta - \sin^6\theta.$$

$$= 7 - 7\sin^6\theta - 21\sin^2\theta + 21\sin^4\theta - 35\sin^2\theta + 70\sin^4\theta - 35\sin^6\theta + 21\sin^4\theta - 21\sin^6\theta - \sin^6\theta.$$

$$= 7 - 64\sin^6\theta - 56\sin^2\theta + 112\sin^4\theta.$$

---

(2) $\cos 8\theta = 128\cos^8\theta - 256\cos^6\theta + 16\cos^4\theta - 32\cos^2\theta + 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$(\cos 8\theta + i\sin 8\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^8$$

$$= \cos^8\theta + 8C_1 \cos^7\theta (i\sin\theta) + 8C_2 \cos^6\theta (i\sin\theta)^2 + 8C_3 \cos^5\theta (i\sin\theta)^3 + 8C_4 \cos^4\theta (i\sin\theta)^4 + 8C_5 \cos^3\theta (i\sin\theta)^5 + 8C_6 \cos^2\theta (i\sin\theta)^6 + 8C_7 \cos\theta (i\sin\theta)^7 + 8C_8 (i\sin\theta)^8$$

இருபுறமும் மெய் பகுதிகளை ஒப்பிடுக.

$$\cos 8\theta = \cos^8\theta - 28\cos^6\theta \sin^2\theta + 70\cos^4\theta \sin^4\theta - 28\cos^2\theta \sin^6\theta + \sin^8\theta.$$

$$= \cos^8\theta - 28\cos^6\theta(1-\cos^2\theta) + 70\cos^4\theta(1-\sin^2\theta) - 28\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)^3 + (1-\cos^2\theta)^4.$$

$= \cos^8\theta - 28\cos^6\theta + 28\cos^8\theta + 70\cos^4\theta -$
$140\cos^6\theta + 70\cos^8\theta - 28\cos^2\theta +$
$84\cos^4\theta - 84\cos^6\theta + 28\cos^8\theta + 1 - 4\cos^2\theta +$
$6\cos^4\theta - 4\cos^6\theta + \cos^8\theta$

$= 128\cos^8\theta - 256\cos^6\theta + 160\cos^4\theta - 32\cos^2\theta + 1$

---

(3) $\tan 7\theta = \dfrac{7\tan\theta - 35\tan^3\theta + 21\tan^5\theta}{1 - 21\tan^2\theta + 35\tan^4\theta - 7\tan^6\theta}$

என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$\tan 7\theta = \frac{{}^7C_1\tan\theta - {}^7C_3\tan^3\theta + {}^7C_5\tan^5\theta - {}^7C_7\tan^7\theta}{1 - {}^7C_2\tan^2\theta + {}^7C_4\tan^4\theta - {}^7C_6\tan^6\theta}$$

$$= \frac{7\tan\theta - 35\tan^3\theta + 21\tan^5\theta - \tan^7\theta}{1 - 21\tan^2\theta + 35\tan^4\theta - 7\tan^6\theta}$$

---

(4) கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள [illegible] பயன்படுத்தி காண்போம் $\sin^2(2\pi/7), \sin^2(4\pi/7), \sin^2(8\pi/7)$.
$\cos(4\pi/7) + \cos(8\pi/7) + \cos(16\pi/7) = 1/2$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

θ என்பது கீழ் கொடுக்கப்பட்டதில் ஒரு மதிப்பாக எடுத்துக்கொள்ளவும் $2\pi/7$ (or) $4\pi/7$ (or) $8\pi/7$

$\theta = 2\pi/7$ (or) $4\pi/7$ (or) $8\pi/7$

$7\theta = 2\pi$ (or) 4π (or) 8π

$\therefore \sin 7\theta = 0$

$\Rightarrow 7\cos^6\theta \sin\theta - 35\cos^4\theta\sin^3\theta + 21\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta = 0$

$7(1-\sin^2\theta)^3 - 35(1-\sin^2\theta)^2\sin^2\theta +$
$21(1-\sin^2\theta)\sin^4\theta - \sin^6\theta = 0$

$\sin\theta = t$ என எடுத்துக்கொள்க

$$7(1-t^2)^3 - 35(1-t^2)t^2 + 21(1-t^2)t^4 - t^6 = 0$$

$t^2 = y$ என எடுத்துக்கொள்க

$$7(1-y)^3 - 35(1-y)^2 y + 21(1-y)y^2 - y^3 = 0$$

$$7(1-3y+3y^2-y^3) - 35(1-2y+y^2)y + 21(1-y)y^2 - y^3 = 0$$

$$7 - 21y + 21y^2 - 7y^3 - 35y + 70y^2 - 35y^3 + 21y^2 - 21y^3 - y^3 = 0$$

$$64y^3 - 112y^2 + 56y - 7 = 0.$$

மூலங்களின் கூடுதல் காண்க.

$$\sin^2(2\pi/7) + \sin^2(4\pi/7) + \sin^2(8\pi/7) = \frac{112}{64}$$

$$\tfrac{1}{2}(1-\cos 4\pi/7) + \tfrac{1}{2}(1-\cos 8\pi/7) + \tfrac{1}{2}(1-\cos 16\pi/7) = \frac{112}{64}.$$

$$3/2 - \tfrac{1}{2}(\cos 4\pi/7 + \cos 8\pi/7 + \cos 16\pi/7) = 7/4.$$

$$3 - (\cos 4\pi/7 + \cos 8\pi/7 + \cos 16\pi/7) = 7/2$$

$$3 - 7/2 = \cos 4\pi/7 + \cos 8\pi/7 + \cos 16\pi/7$$

$$\cos 4\pi/7 + \cos 8\pi/7 + \cos 16\pi/7 = -1/2.$$

---

(5) $\tan 2\pi/7 \; \tan 4\pi/7 \; \tan 6\pi/7 = \sqrt{7}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

θ என்பது ஏதோ ஒரு மதிப்பு.

$2\pi/7$ (அல்லது) $4\pi/7$ (அல்லது) $6\pi/7$.

$7\theta = 2\pi$ (அல்லது) 4π (அல்லது) 6π

$\tan 7\theta = 0$

$$\frac{7c_1 \tan\theta - 7c_3 \tan^3\theta + 7c_5 \tan^5\theta - 7c_7 \tan^7\theta}{1 - 7c_2 \tan^2\theta + 7c_4 \tan^4\theta - 7c_6 \tan^6\theta} = 0$$

$$7\tan\theta - 35\tan^3\theta + 21\tan^5\theta - \tan^7\theta = 0$$

$7(1-t^2)^3 - 35(1-t^2)^2 t^2 + 21(1-t^2)t^4 - t^6 = 0$

$t^2 = y$ என்று பயன்படுத்தவும்

$7(1-y)^3 - 35(1-y)^2 y + 21(1-y)y^2 - y^3 = 0$

$7(1-3y+3y^2-y^3) - 35(1-2y+y^2)y +$
$21(1-y)y^2 - y^3 = 0$

$\tan(2\pi/7) = \tan(\pi - 5\pi/7) = -\tan 5\pi/7$

$\tan(4\pi/7) = \tan(\pi - 3\pi/7) = -\tan 3\pi/7$

$\tan(6\pi/7) = \tan(\pi - \pi/7) = -\tan \pi/7$

$\therefore$ சமன்பாடு $x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7 = 0$ என்பதன் 6 மூலங்கள் $\pm\tan 2\pi/7$, $\pm\tan 4\pi/7$, $\pm\tan 6\pi/7$.

$x^2 = y$ என்று மேலே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிடக்கவும்,

$y^3 - 21y^2 + 35y - 7 = 0$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\tan^2 2\pi/7, \tan^2 4\pi/7, \tan^2 6\pi/7$

$\therefore \tan^2 2\pi/7 \cdot \tan^2 4\pi/7 \cdot \tan^2 6\pi/7 = 7$

$\tan 2\pi/7 \cdot \tan 4\pi/7 \cdot \tan 6\pi/7 = \sqrt{7}$

$\sin^n\theta$ மற்றும் $\cos^n\theta$ காண :-

தேற்றம் :-

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos n\theta + nc_1 \cos(n-2)\theta + nc_2 \cos(n-4)\theta + \cdots\right]$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) $2^5 \cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10$ என நிறுவுக.

தீர்வு :- $x = \cos\theta + i\sin\theta$

$x + 1/x = 2\cos\theta \quad ; \quad x^n + 1/x^n = 2\cos n\theta$

$(2\cos\theta)^6 = (x + 1/x)^6$

$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + (15/x^2) + (6/x^4) + (1/x^6)$

$= (x^6 + 1/x^6) + 6(x^4 + 1/x^4) + 15(x^2 + 1/x^2) + 20$

2 ஆல் இருபக்கமும் வகுக்கவும்.

$2^5 \cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10.$

(2) $\sin^5\theta = (1/2^4)[\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta]$

என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$x = \cos\theta + i\sin\theta$

$(2i\sin\theta)^5 = (x - 1/x)^5$

$= x^5 - 5C_1 x^4 \cdot 1/x + 5C_2 x^3 \cdot 1/x^2 - 5C_3 x^2 \cdot 1/x^3 +$

$5C_4 x \cdot 1/x^4 - 5C_5 \, 1/x^5.$

$i^5 2^5 \sin^5\theta = x^5 - 5x^3 + 10x - 10/x + 5/x^3 - 1/x^5$

$i 2^5 \sin^5\theta = (x^5 - 1/x^5) - 5(x^3 - 1/x^3) + 10(x - 1/x)$

இருபக்கமும் 2i ஆல் வகுக்கவும், சமன்பாடு (2)ல்

$i2^5 \sin^5\theta = 2i\sin 5\theta - 5 \times 2i\sin 3\theta + 10 \times 2i\sin\theta \rightarrow (2)$

$\sin^5\theta = \frac{1}{2^4}[\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta].$

(3) $\sin^3\theta \cos^5\theta$ - ஐ, θ-ன் மடங்குகளான சைன் தொடராக மாற்றி எழுதுக.

தீர்வு :-

$x = \cos\theta + i\sin\theta$

$x + 1/x = 2\cos\theta \; ; \; x - 1/x = 2i\sin\theta$

$(2\cos\theta)^5 (2i\sin\theta)^3 = (x + 1/x)^5 (x - 1/x)^3$

$-2^8 i \cos^5\theta \sin^3\theta = (x + 1/x)^5 (x - 1/x)^3$

$= [(x + 1/x)^2][(x + 1/x)(x - 1/x)]^3$

$= (x + 1/x)^2 [x^2 - 1/x^2]^3$

$$= x^2 + 2 + 1/x^2 \left[x^6 - 1/x^6 - 3x^2 + 3/x^2\right]$$

$$= x^8 - 1/x^4 - 3x^4 + 3 + 2x^6 - \frac{2}{x^6} - 6x^2 + 6/x^2 + x^4 - 1/x^8 - 3 + 3/x^4$$

$$= (x^8 - 1/x^8) + 2(x^6 - 1/x^6) - 2(x^4 - 1/x^4) - 6(x^2 - 1/x^2)$$

$$= 2i \sin 8\theta + 2 \times 2i \sin 6\theta - 2 \times 2i \sin 4\theta - 6 \times 2i \sin 2\theta$$

இரண்டு பக்கமும் $2i$ கொண்டு வகுக்கவும்.

$$\cos^5\theta \sin^3\theta = \frac{-1}{27}\left[\sin 8\theta + 2\sin 6\theta - 2\sin 4\theta - 6\sin 2\theta\right].$$

$\cos\theta$, $\sin\theta$ மற்றும் $\tan\theta$ ன் தொடரை θ-ன் அடுக்குகளின் மேல் காணல்.

தேற்றம் :-

(i) $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$

(ii) $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$

(iii) $\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$

எடுத்துக்காட்டுகள் :-

① θ-ன் மதிப்பை தோராயமாக காண்க, $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{863}{864}$.

தீர்வு :-

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \cdots$$

$$\frac{863}{864} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \cdots$$

$$1 - \frac{1}{864} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!}$$

$$\frac{1}{864} = \frac{\theta^2}{3!} - \frac{\theta^4}{5!} + \cdots$$

$$\frac{\theta^2}{3!} = \frac{1}{864} \Rightarrow \theta^2 \cong \frac{6}{864} = \frac{1}{144}.$$

$\therefore \theta = 1/12$ ரேடியன்.

---

(2) $\cos(\alpha + x) = \cos\alpha - \cos x \sin\alpha - \frac{x^2}{2}\cos\alpha + \frac{x^3}{6}\sin\alpha$

தீர்வு :-

$$\cos(\alpha + x) = \cos\alpha \cos x - \sin\alpha \sin x.$$

$$= \cos\alpha\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right] - \sin\alpha\left[x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right]$$

$$= \cos\alpha - x\sin\alpha - \frac{x^2}{2}\cos\alpha + \frac{x^3}{6}\sin\alpha$$

---

(3) தீர் $\cos(\pi/3 + \theta) = 0.49.$

தீர்வு :-

$$\cos(\pi/3 + \theta) = 0.49$$

$$\cos\pi/3 \cos\theta - \sin\pi/3 \sin\theta = 0.49$$

$$1/2\,(1 - \theta^2/2! + \cdots) - \sqrt{3}/2\,(\theta - \theta^3/3! + \cdots) = 0.49$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\theta = 0.49$$

$$\sqrt{3}/2\ \theta = 1/2 - 0.49 = 1/100$$

$$\theta = \frac{1}{50\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{150} = \frac{1.732}{150} = 0.115 \text{ ரேடியன்}$$

$\therefore \theta = 40$ நிமிடங்கள்.

---

(4) $\sin 3^\circ$ மதிப்பிடுக

தீர்வு :-

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$180^\circ = \pi$ ரேடியன் $\Rightarrow 1^\circ = \pi/180$ ரேடியன்

$3^\circ = 3\pi/180$ ரேடியன் $\Rightarrow \pi/60$ ரேடியன்

$$\sin 3^\circ = \sin(\pi/60) = \pi/60 - \frac{1}{3!}(\pi/60)^3 + \dots$$
$$= \pi/60$$
$$= \frac{22}{7} \times \frac{1}{60} = 0.052.$$

---

(5) $x = \frac{2}{1!} - \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} - \frac{8}{7!}$ மற்றும் $y = 1 + \frac{2}{1!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!}$ என்று இருந்தால் $x^2 = y$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$x = \frac{1+1}{1!} - \frac{3+1}{3!} + \frac{5+1}{5!} - \frac{7+1}{7!} + \dots$$
$$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{3}{3!} + \frac{5}{5!} - \frac{7}{7!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots\right)$$
$$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots\right)$$
$$= \cos 1 + \sin 1.$$
$$x^2 = (\cos 1 + \sin 1)^2$$
$$x^2 = \cos^2 1 + \sin^2 1 + 2\sin 1 \cos 1$$
$$x^2 = 1 + \sin 2$$
$$x^2 = 1 + \left(\frac{2}{1!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \dots\right)$$
$$x^2 = y.$$

---

(6) θ-வின் மதிப்பு சிறியதாகும், $\theta \cot\theta = 1 - \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^4}{45}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$\theta \cot\theta = \frac{\theta}{\tan\theta} = \frac{\theta}{\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15}}$$
$$= \frac{\theta(1)}{\theta\left(1 + \frac{\theta^2}{3} + \frac{2\theta^4}{15}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\theta^2}{3} + \frac{2\theta^4}{15}}$$
$$= \left(1 + \theta^2/3 + 2\theta^4/15\right)^{-1}.$$

$$= 1 - \left(\theta^2/3 + 2\theta^4/15\right) + \left(\theta^2/3 + 2\theta^4/15\right)^2 - \cdots$$

$$= 1 - \theta^2/3 - \left(2/15 - 1/9\right)\theta^4$$

$$= 1 - \theta^2/3 - \theta^4/45$$

---

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{x - \sin x} = 24$ என தீர்வு காண்.

தீர்வு :-

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{3\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right) - \left(\frac{3x}{1!} - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} \cdots\right)}{x - \left(x/1! - x^3/3! + x^5/5! - \cdots\right)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\left(-x^3/2 + 27x^3/6\right) - \left(\frac{3x^5}{5!} - \frac{(3x)^5}{5!} + \cdots\right)}{x^3/3! - x^5/5! + \cdots} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\left(-1/2 + 9/2\right) - \left(3/5! - \frac{3^5 x^2}{5!}\right) + \cdots}{1/3! - x^2/5!} \right]$$

$$= 24.$$

---

(8) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{1 - \cos cx} \right) = 2\left(\dfrac{b^2 - a^2}{c^2} \right)$

தீர்வு :-

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{1 - \cos cx} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{(\cos ax)^2 - (\cos bx)^2}{1 - \cos cx} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\left(1 - \frac{a^2x^2}{2} + \cdots\right)^2 - \left(1 - \frac{b^2x^2}{2} + \cdots\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{c^2x^2}{2!} + \cdots\right)} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(1-\frac{2a^2x^2}{2!}+\frac{a^4x^4}{(2!)^2}+\cdots\right)-\left(1-\frac{2b^2x^2}{2!}+\frac{b^4x^4}{2!}+\cdots\right)}{c^2x^2/2!}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{0+\frac{(-2a^2+2b^2)x^2}{2!}}{c^2x^2/2!}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{2(b^2-a^2)x^2}{2!}}{c^2x^2/2!}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2(b^2-a^2)}{x^2\left(\frac{c^2}{2!}\right)}\right]$$

$$= \frac{b^2-a^2}{c^2/2}$$

$$= \frac{2(b^2-a^2)}{c^2}$$

பகுதி - IV

மிகை வளைவுச்சார்புகள்

மிகை வளைவுச்சார்புகள் கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கப் -படுகின்றன.

(1) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (2) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(3) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ (4) $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

(5) $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\sinh x}$ (6) $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$.

நிறுவுக :-

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

தீர்வு :-

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4}$$

$$= 4/4 = 1$$

(2) $2\sinh x \cosh x = \sinh 2x$

தீர்வு :-

$$2\sinh x \cosh x = 2\left[\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{4}\left[e^x e^x + e^x e^{-x} - e^{-x} e^x - e^{-x} e^{-x}\right]$$

$$= 1/2\left[e^{2x} - e^{-2x}\right] = \sinh 2x.$$

(3) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

தீர்வு :-

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}) + (e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[2e^{2x} + 2e^{-2x}\right] = \frac{2}{4}\left[e^{2x} + e^{-2x}\right]$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x.$$

(ii) முடிவு 1 $\Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \rightarrow (1)$$

முடிவு 3 $\Rightarrow \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x \rightarrow (2)$

(1) - ஐ (2) - ல் பொருத்துக

$$1 + \sinh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

$$2\sinh^2 x = \cosh 2x - 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

முடிவு (1) $\Rightarrow \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 \rightarrow (3)$

(3) - ஐ (2) - ல் பொருத்துக

$$\cosh^2 x + \cosh^2 x - 1 = \cosh 2x$$

$$2\cosh^2 x = \cosh 2x + 1$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

வட்ட சார்புகளுக்கும் அதிபரவளைய சார்புகளுக்கும் உள்ள தொடர்புகள் :-

தேற்றம் :-

(i) $\sin ix = i \sinh x$

(ii) $\cos ix = \cosh x$

(iii) $\tan ix = i \tanh x$

தீர்வு :-

(i) $\sin(ix) = (ix) - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!}$

$$= i\left[x - \frac{i^2x^3}{3!} + \frac{i^4x^5}{5!}\right]$$

$$= i\left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]$$

$$= i \sinh x$$

(ii) $\cos(ix) = 1 - \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} - \frac{(ix)^6}{6!}$

$$= 1 - \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^4x^4}{4!} - \frac{i^6x^6}{6!}$$

(iii) $\tan(ix) = \dfrac{\sin(ix)}{\cos(ix)} = \dfrac{i\sinh x}{\cosh x} = i\tanh x$.

குறிப்பு :-

① $\sinh x = (1/i)(\sin(ix)) = -i\sin(ix)$

② $\cosh x = \cos ix$

③ $\tanh x = -i\tan(ix)$

தலைகீழ் சைன வளையச்சார்புகள் :-

① $\sinh^{-1}x = \log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

தீர்வு :-

$$y = \sinh^{-1}x \Rightarrow x = \sinh y$$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y} \Rightarrow 2x = e^y - \frac{1}{e^y}$$

$$\Rightarrow 2xe^y = e^{2y} - 1$$

$$\Rightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(-2x)^2 - 4(+1)(-1)}}{2(1)} \Rightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}$$

$$= \frac{2x \pm 2(\sqrt{x^2+1})}{2} = \frac{2(x \pm \sqrt{x^2+1})}{2}$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

இருபுறமும் லாக் எடுக்கவும்

$$\log e^y = \log_e\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$y = \log_e\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right).$$

---

② அதுபோல,

$\cosh^{-1}x = \log_e\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

---

③ $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

தீர்வு :-

$$y = \tanh^{-1}x$$

$$x = \tanh y \Rightarrow x = \frac{\sinh y}{\cosh y}$$

$$x = \frac{\frac{e^y - e^{-y}}{2}}{\frac{e^y + e^{-y}}{2}} \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$x(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y}$$

$$xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y}$$

$$e^{-y}(1+x) = e^y - xe^y$$

$$1+x = e^{2y}(1-x) \Rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}.$$

இருபுறமும் லாக் எடுக்கவும்,

$$\log e^{2y} = \log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow 2y = \log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :-

(1) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$

தீர்வு :-

$$(\cosh x + \sinh x)^n = (\cos ix + \sin ix)^n$$
$$= \cos(ix) - i\sin(ix)$$
$$= \cos i(nx) - i\sin i(nx)$$
$$= \cosh nx + \sinh nx.$$

---

(2) $\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = \cosh 2x + \sinh 2x$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = \frac{1+\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)}{1-\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)} = \frac{\cosh x + \sinh x}{\cosh x - \sinh x}$$

$$= \left(\frac{\cosh x + \sinh x}{\cosh x - \sinh x}\right) \times \left(\frac{\cosh x + \sinh x}{\cosh x + \sinh x}\right)$$

$$= \frac{(\cosh x + \sinh x)^2}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x + 2\sinh x \cosh x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$$

$$= \cosh^2 x + \sinh^2 x \, .$$

(3) $\tan(a+ib) = x+iy$, எனில் $\frac{x}{y} = \frac{\sin 2a}{\sinh 2b}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$x+iy = \tan(a+ib) = \frac{\sin(a+ib)}{\cos(a+ib)}$$

$$= \frac{\sin(a+ib)}{\cos(a+ib)} \times \frac{\cos(a-ib)}{\cos(a-ib)} = \frac{\sin 2a + \sin(i2b)}{\cos 2a + \cos(i2b)}$$

$$= \frac{\sin 2a + i\sinh 2b}{\cos 2a + \cosh 2b} \, .$$

இருபுறமும் மெய், கற்பனை பகுதிகளை ஒப்பிடுக.

$$x = \frac{\sin 2a}{\cos 2a + \cosh 2b} \quad ; \quad y = \frac{\sinh 2b}{\cos 2a + \cosh 2b}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin 2a}{\sinh 2b} \, .$$

(4) $x+iy = \tan(A+iB)$ எனில், $x^2+y^2+2x\cot 2A = 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$x+iy = \tan(A+iB) \; ; \; x-iy = \tan(A-iB)$$

$$\cot 2A = \frac{1}{\tan 2A} = \frac{1}{\tan[(A+iB)+(A-iB)]}$$

$$= \frac{1 - \tan(A+iB)\tan(A-iB)}{\tan(A+iB) + \tan(A-iB)}$$

$$= \frac{1-(x+iy)(x-iy)}{(x+iy)+(x-iy)} = \frac{1-(x^2+y^2)}{2x}$$

$2x \cot 2A = 1 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x \cot 2A = 1.$

---

(5) $x + iy = \sin(A + iB)$ எனில் $\dfrac{x^2}{\sin^2 A} - \dfrac{y^2}{\cos^2 A} = 1$

என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$x + iy = \sin(A + iB)$

$= \sin A \cos iB + \cos A \sin iB$

$= \sin A \cosh B + i \cos A \sinh B.$

இருபுறமும் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை

ஒப்பிட

$x = \sin A \cosh B \Rightarrow \cosh B = \dfrac{x}{\sin A} \rightarrow (1)$

$y = \cos A \sinh B \Rightarrow \sinh B = \dfrac{y}{\cos A} \rightarrow (2)$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தும்

$\dfrac{x^2}{\sin^2 A} - \dfrac{y^2}{\cos^2 A} = \cosh^2 B - \sinh^2 B.$

$\dfrac{x^2}{\sin^2 A} - \dfrac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$

---

(6) $\cos(x + iy) = \cos\theta + i\sin\theta$, எனில்

$\cos 2x + \cosh 2y = 2$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$\cos\theta + i\sin\theta = \cos(x + iy)$

$= \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)$

$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$

இருபுறமும் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை

ஒப்பிட

$\cos\theta = \cos x \cosh y \rightarrow (1)$; $\sin\theta = -\sin x \sinh y$

இதேமுறையும் நிரூபிக்கப்படுத்தும்

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$

$= \cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x) \sinh^2 y$

$= \cos^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y - \cos^2 x \sinh^2 y$

$= \cos^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos^2 x + \sinh^2 y$

$1 = \dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{\cosh 2y - 1}{2}$

$2 = 1 + \cos 2x + \cosh 2y - 1$

$2 = \cos 2x + \cosh 2y.$

---

(7) $\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos(\theta + i\phi)$ என்றால் $\sin^2\theta = \pm\sin\alpha$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos(\theta + i\phi)$

$= \cos\theta \cosh\phi - \sin\theta \, i \sinh\phi$

$\cos\alpha = \cos\theta \cosh\phi \; ; \; \sin\alpha = -\sin\theta \sinh\phi$

$\Rightarrow \cosh\phi = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta} \; ; \; \sinh\phi = -\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \cosh^2\phi = \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} \rightarrow (1) \; ; \; \sinh^2\phi = \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \rightarrow (2)$

(1) − (2)

$\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}$

$1 = \dfrac{\cos^2\alpha \sin^2\theta - \sin^2\alpha \cos^2\theta}{\cos^2\theta \sin^2\theta}$

$\cos^2\alpha \sin^2\theta - \sin^2\alpha \cos^2\theta = \cos^2\theta \sin^2\theta$

$(1 - \sin^2\alpha)\sin^2\theta - \sin^2\alpha(1 - \sin^2\theta) = (1 - \sin^2\theta)\sin^2\theta$

$\sin^2\theta - \sin^2\theta \sin^2\alpha - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin^2\theta$
$= \sin^2\theta - \sin^4\theta.$

$\sin^2\theta - \sin^2\alpha - \sin^2\theta = -\sin^4\theta$

$-\sin^2\alpha = -\sin^4\theta$

$\therefore \sin^2\theta = \pm\sin\alpha.$

(8) $\cosh^7 x = \frac{1}{2^6}\left[\cosh 7x + 7\cosh 5x + 21\cosh 3x + 35\cosh x\right]$

Soln :-

$\cosh^7 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^7$

$= \frac{1}{2^7}\Big[e^{7x} + (7C_1 e^{6x} e^{-x}) + (7C_2 e^{5x} e^{-2x}) + (7C_3 e^{4x} e^{-3x}) + (7C_4 e^{3x} e^{-4x}) + (7C_5 e^{2x} e^{-5x}) + (7C_6 e^{x} e^{-6x}) + (7C_7 e^{-7x})\Big]$

$= \frac{1}{2^7}\left[(e^{7x} + e^{-7x}) + 7(e^{5x} + e^{-5x}) + 21(e^{3x} + e^{-3x}) + 35(e^x + e^{-x})\right]$

$= \frac{1}{2^6}\left[\frac{e^{7x} + e^{-7x}}{2} + \frac{7(e^{5x} + e^{-5x})}{2} + \frac{21(e^{3x} + e^{-3x})}{2} + 35\frac{(e^x + e^{-x})}{2}\right]$

$= \frac{1}{2^6}\left[\cosh 7x + 7\cosh 5x + 21\cosh 3x + 35\cosh x\right]$

---

(9) மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை பிரித்து எழுதுக.

(i) $\sinh(\alpha + i\beta)$

தீர்வு :-

$x + iy = \sinh(\alpha + i\beta) = -i\sin i(\alpha + i\beta)$

$x + iy = -i\sin(i\alpha - \beta)$

$= -i(\sin i\alpha \cos\beta - \cos i\alpha \sin\beta)$

$= -i(i\sinh\alpha \cos\beta - \cosh\alpha \sin\beta)$

$x + iy = \sinh\alpha \cos\beta + i\cosh\alpha \sin\beta$

$x = \sinh\alpha \cos\beta \; ; \; y = \cosh\alpha \sin\beta$

மெய் $= \sinh\alpha \cos\beta$; கற்பனை $= \cosh\alpha \sin\beta$.

(ii) $\tan h(1+i)$

தீர்வு :-

$$x+iy = \frac{\sin h(1+i)}{\cosh(1+i)} = -\frac{i\sin(1+i)}{\cos i(1+i)} = \frac{-i\sin(i-1)}{\cos(i-1)}$$

$$= \frac{-i\,2\sin(i-1)\cos(i+1)}{2\cos(i-1)\cos(i+1)} = \frac{-i[\sin 2i - \sin 2]}{\cos 2i + \cos 2}$$

$$= \frac{-i[i\sin h2 - \sin 2]}{\cos h2 + \cos 2} = \frac{\sin h2 + i\sin 2}{\cosh 2 + \cos 2}.$$

மெய் $= \dfrac{\sin h2}{\cosh 2 + \cos 2}$; கற்பனை $= \dfrac{\sin 2}{\cosh 2 + \cos 2}$.

(iii) $\tan^{-1}(x+iy)$

தீர்வு :-

$$\tan^{-1}(x+iy) = A+iB$$

$$\tan(A+iB) = x+iy \quad ; \quad \tan(A-iB) = x-iy$$

$$\tan 2A = \tan(A+iB + A-iB)$$

$$= \frac{\tan(A+iB) + \tan(A-iB)}{1-\tan(A+iB)\tan(A-iB)} = \frac{(x+iy)+(x-iy)}{1-(x+iy)(x-iy)}$$

$$= \frac{2x}{1-(x^2+y^2)}$$

$$\therefore 2A = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-(x^2+y^2)}\right)$$

$\therefore$ மெய் பகுதியானது $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-(x^2+y^2)}\right)$.

இதுபோல,

கற்பனை பகுதியானது

$$\frac{1}{2}\tan h^{-1}\left[\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right].$$

(70) $\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ तो सिद्ध करो

(i) $\theta = \frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{4}\pi$ (ii) $\phi = \frac{1}{2}\log\tan(\pi/4 + \alpha/2)$.

प्रमाण :-

$$\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$$
$$\tan(\theta - i\phi) = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

(i) $\cancel{\text{Now}}$ $2\theta = (\theta + i\phi) + (\theta - i\phi)$

$$\tan 2\theta = \tan[(\theta + i\phi) + (\theta - i\phi)]$$

$$= \frac{\tan(\theta + i\phi) + \tan(\theta - i\phi)}{1 - \tan(\theta + i\phi)\tan(\theta - i\phi)}$$

$$= \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\alpha - i\sin\alpha}{1 - (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{1 - (\cos^2\alpha - i^2\sin^2\alpha)} = \frac{2\cos\alpha}{1-1} = \frac{2\cos\alpha}{0}$$

$$= \infty = \tan\pi/2.$$

$$2\theta = n\pi + \pi/2 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

(ii) $\tan(2i\phi) = \tan[(\theta + i\phi) - (\theta - i\phi)]$

$$= \frac{\tan(\theta + i\phi) - \tan(\theta - i\phi)}{1 - \tan(\theta + i\phi)\tan(\theta - i\phi)}$$

$$= \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha) - (\cos\alpha - i\sin\alpha)}{1 - (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}.$$

$$= \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha}{1 - (\cos^2\alpha - i^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{2i\sin\alpha}{1+1} = i\sin\alpha.$$

$$i\tanh 2\phi = i\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \tanh 2\phi = \sin\alpha.$$

$$2\phi = \tanh^{-1}(\sin\alpha) \Rightarrow 2\phi = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+\frac{2\tan\alpha/2}{1+\tan^2\alpha/2}}{1-\frac{2\tan\alpha/2}{1+\tan^2\alpha/2}}\right] = \frac{1}{2}\log\left[\frac{(1+\tan\alpha/2)^2}{(1-\tan\alpha/2)^2}\right]$$

$$= 2/2\log\left[\frac{1+\tan\alpha/2}{1-\tan\alpha/2}\right] = \log\left[\frac{\tan\pi/4+\tan\alpha/2}{1-\tan\pi/4\,\tan\alpha/2}\right]$$

$$2\phi = \log\left[\tan \pi/4 + \alpha/2\right]$$

$$\phi = 1/2\log\left[\tan\pi/4 + \alpha/2\right].$$

---

(11) $\tan x/2 = \tanh x/2$. எனில் $\cos x \cosh x = 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$\cosh x = \frac{1+\tanh^2 x/2}{1-\tanh^2 x/2} = \frac{1+\tan^2 x/2}{1-\tan^2 x/2}$$

$$= \frac{1+\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}}{1-\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}} = \frac{\frac{\cos^2 x/2+\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}}{\frac{\cos^2 x/2-\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}}.$$

$$\therefore \cosh x = \frac{1}{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}$$

$$= \frac{1}{\cos 2\cdot x/2} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cosh x \cdot \cos x = 1.$$

---

(12) $u = \log_e \tan(\pi/4 + \theta/2)$ Iff $\cosh u = \sec\theta$.

தீர்வு :-

$$\cosh u = \sec\theta \Rightarrow u = \cosh^{-1}(\sec\theta)$$

$$u = \log_e(\sec\theta + \sqrt{\sec^2\theta - 1}) = \log_e(\sec\theta + \sqrt{\tan^2\theta})$$

$$= \log_e(\sec\theta + \tan\theta) = \log_e\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \log_e\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \log_e\left(\frac{1+2\tan\theta/2 \,/\, 1+\tan^2\theta/2}{1-\tan^2\theta/2 \,/\, 1+\tan^2\theta/2}\right)$$

$$= \log_e\left(\frac{(1+\tan\theta/2)^2}{1-\tan^2\theta/2}\right) = \log_e\left(\frac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2}\right)$$

$$= \log_e\left[\frac{\tan\pi/4 + \tan\theta/2}{1-\tan\pi/4\ \tan\theta/2}\right]$$

$$= \log_e\left[\tan(\pi/4+\theta/2)\right]$$

ஆகையால்,

$$u = \log_e \tan(\pi/4 + \theta/2)$$

$$e^u = \cancel{\log}\ \tan(\pi/4 + \theta/2)$$

$$e^{u/2}\cdot e^{u/2} = \tan(\pi/4 + \theta/2)$$

$$\frac{e^{u/2}}{e^{-u/2}} = \frac{\tan\pi/4 + \tan\theta/2}{1-\tan\pi/4\ \tan\theta/2} = \frac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2}$$

$$\frac{e^{u/2}-e^{-u/2}}{e^{u/2}+e^{-u/2}} = \frac{1+\tan\theta/2-(1-\tan\theta/2)}{1+\tan\theta/2+(1-\tan\theta/2)}$$

$$= \frac{2\tan\theta/2}{2} = \tan\theta/2.$$

$$\frac{e^{u/2}-e^{-u/2}}{e^{u/2}+e^{-u/2}} = \tan\theta/2.$$

$$\tanh(u/2) = \tan\theta/2$$

$$\cosh u = \frac{1+\tanh^2 u/2}{1-\tanh^2 u/2} = \frac{1+\tan^2\theta/2}{1-\tan^2\theta/2} = \frac{1+\frac{\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2}}{1-\frac{\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2}}$$

$$= \frac{\cos^2\theta/2+\sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2-\sin^2\theta/2} = \frac{1}{\cos^2\theta/2-\sin^2\theta/2}$$

$$= \frac{1}{\cos 2\cdot\theta/2} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cosh u = \sec\theta.$$

---

(13) $\cos(x+iy) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனில்

$y = \frac{1}{2}\log\left[\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\right]$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin(iy)$$

$$= \cos x \cosh y - \sin x \, i \sinh y$$

$$\cos x \cosh y - \sin x \, i \sinh y = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

இருபுறமும் மெய், கற்பனை பகுதிகளை ஒப்பிட

$$r\cos\alpha = \cos x \cosh y \rightarrow (1)$$

$$r\sin\alpha = -\sin x \sinh y \rightarrow (2)$$

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க.

$$\frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha} = \frac{-\sin x \sinh y}{\cos x \cosh y} \Rightarrow \tan\alpha = -\tan x \tanh y$$

$$\tanh y = -\frac{\tan\alpha}{\tan x} \Rightarrow y = \tan^{-1}h\left(-\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\log\left[\frac{1-\tan\alpha/\tan x}{1+\tan\alpha/\tan x}\right] = \frac{1}{2}\log\left[\frac{\tan x - \tan\alpha}{\tan x + \tan\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[\frac{\sin x\cos\alpha - \sin\alpha\cos x}{\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\log\left[\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\right]$$

பகுதி - 5

எடுத்துக்காட்டுகள் :-

(1) $\text{Log}\, i = i(4n+1)(\pi/2)$ என நிறுவு.

தீர்வு :-

$$i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$$

$$\begin{aligned}\text{Log}\, i &= \log 1 + i[(\pi/2) + 2n\pi] \\ &= i[(\pi/2) + 2n\pi] \\ &= i(4n+1)(\pi/2).\end{aligned}$$

---

(2) (i) $\text{Log}(1+i)$ (ii) $\text{Log}(-e)$ மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :-

(i) $1+i = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)]$

$$\begin{aligned}\therefore \text{Log}(1+i) &= \log\sqrt{2} + i(\pi/4) + 2n\pi i \\ &= \tfrac{1}{2}\log 2 + i(8n+1)(\pi/4).\end{aligned}$$

(ii) $-e = e(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\begin{aligned}\text{Log}(-e) &= \log e + i(\pi + 2n\pi) \\ &= 1 + i(2n+1)\pi.\end{aligned}$$

---

(3) $i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}$ என நிறுவு.

தீர்வு :- $i^i = e^{i\,\text{Log}\, i} = e^{i\, i(4n+1)\pi/2}$

$$= e^{-(4n+1)\pi/2}$$

---

(4) $i^{a+ib} = a+ib$ எனில் $a^2+b^2 = e^{-(4n+1)\pi b}$.

தீர்வு :-

$$i^{a+ib} = a+ib \rightarrow (1)$$

$$\begin{aligned}i^{a+ib} &= e^{(a+ib)\,\text{Log}\, i} \\ &= e^{(a+ib)\, i(4n+1)(\pi/2)} \\ &= e^{(ai-b)(4n+1)(\pi/2)}\end{aligned}$$

$$= e^{ia(4n+1)\pi/2}\; e^{-b(4n+1)\pi/2}$$

$$= e^{-b(4n+1)(\pi/2)}\,[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$a + ib = e^{-b(4n+1)(\pi/2)}\,[\cos\theta + i\sin\theta].$$

இருபுறமும் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை ஒப்பிடுக.

$$a = e^{-b(4n+1)(\pi/2)}\cdot\cos\theta$$

$$b = e^{-b(4n+1)(\pi/2)}\cdot\sin\theta$$

$$\therefore a^2 + b^2 = e^{-b(4n+1)\pi} = e^{-(4n+1)\pi b}.$$

திரிகோணமிதியின் தொடர் :-

எடுத்துக்காட்டுகள் :-

(1) $$\frac{1}{\sin\theta\sin2\theta} + \frac{1}{\sin2\theta\sin3\theta} + \cdots \text{ (வரை)}$$

$\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cosec}2\theta + \operatorname{cosec}2\theta\operatorname{cosec}3\theta + \cdots$

n - உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :-

$$S_n = \frac{1}{\sin\theta\sin2\theta} + \frac{1}{\sin2\theta\sin3\theta} + \cdots$$

$$T_n = \frac{1}{\sin n\theta\sin(n+1)\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\sin\theta}{\sin n\theta\sin(n+1)\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\sin(n+1)\theta - n\theta}{\sin n\theta\,\sin(n+1)\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\sin(n+1)\theta\cos n\theta - \cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin n\theta\sin(n+1)\theta}\right]$$

$$= \operatorname{cosec}\theta\,[\cot(n\cancel{+1})\theta - \cot(n+1)\theta].$$

$$T_1 = \operatorname{cosec}\theta\,[\cot\theta - \cot2\theta]$$

$$T_2 = \operatorname{cosec}\theta\,[\cot2\theta - \cot3\theta]$$

$$T_3 = \operatorname{cosec}\theta\,[\cot3\theta - \cot4\theta]$$

$$\vdots$$

$$T_n = \operatorname{cosec}\theta\,[\cot n\theta - \cot(n+1)\theta]$$

$$\therefore S_n = \operatorname{cosec}\theta\,[\cot\theta - \cot(n+1)\theta].$$

(2) மதிப்பு காண்க

$$S_n = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta} + \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta + \cos 4\theta} + \frac{\sin 3\theta}{\cos\theta + \cos 6\theta} + \cdots$$

தீர்வு :-

$$T_n = \frac{\sin n\theta}{\cos\theta + \cos 2n\theta}$$

$$= \frac{1}{2\sin(\theta/2)}\left[\frac{2\sin(\theta/2)\sin n\theta}{2\cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin(\theta/2)}\left[\frac{\cos(n-1/2)\theta - \cos(n+1/2)\theta}{2\cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{cosec}(\theta/2)\left[\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{cosec}(\theta/2)\left[\sec\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) - \sec\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)\right]$$

$$T_1 = \frac{1}{4}\operatorname{cosec}(\theta/2)\left[\sec(3\theta/2) - \sec(\theta/2)\right]$$

$$T_2 = \frac{1}{4}\operatorname{cosec}(\theta/2)\left[\sec(5\theta/2) - \sec(3\theta/2)\right]$$

$$\vdots$$

$$T_n = \frac{1}{4}\operatorname{cosec}(\theta/2)\left[\sec\left[\frac{(2n+1)\theta}{2}\right] - \sec\left[\frac{(2n-1)\theta}{2}\right]\right]$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{4}\operatorname{cosec}(\theta/2)\left[\sec\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) - \sec(\theta/2)\right].$$

---

(3) மதிப்பு காண்க

$$S_n = \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta\cos 3\theta} + \frac{\sin 4\theta}{\cos 3\theta\cos 5\theta} + \frac{\sin 6\theta}{\cos 5\theta\cos 7\theta} + \cdots$$

தீர்வு :-

$$T_n = \frac{\sin 2n\theta}{\cos(2n-1)\theta\cos(2n+1)\theta}$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta}\left[\frac{2\sin\theta\sin 2n\theta}{\cos(2n-1)\theta\cos(2n+1)\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta}\left[\frac{\cos(2n-1)\theta - \cos(2n+1)\theta}{\cos(2n-1)\theta\ \cos(2n+1)\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta\left[\sec(2n+1)\theta - \sec(2n-1)\theta\right]$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta\left[\sec 3\theta - \sec\theta\right]$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta\left[\sec 5\theta - \sec 3\theta\right]$$

$\vdots$

$$T_n = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta\left[\sec(2n+1)\theta - \sec(2n-1)\theta\right].$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta\left[\sec(2n+1)\theta - \sec\theta\right].$$

---

(4) மதிப்பு காண்க

$$S_n = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\sin 3\theta} - \frac{\sin 4\theta}{\sin 3\theta\sin 5\theta} + \frac{\sin 6\theta}{\sin 5\theta\sin 7\theta} + \cdots$$

தீர்வு :-

$$T_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{\sin 2n\theta}{\sin(2n-1)\theta\sin(2n+1)\theta}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2\cos\theta}\left[\frac{2\cos\theta\sin 2n\theta}{\sin(2n-1)\theta\sin(2n+1)\theta}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2\cos\theta}\left[\frac{\sin(2n+1)\theta + \sin(2n-1)\theta}{\sin(2n-1)\theta\ \sin(2n+1)\theta}\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\left(\tfrac{1}{2}\sec\theta\right)\left[\operatorname{cosec}(2n-1)\theta + \operatorname{cosec}(2n+1)\theta\right]$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\sec\theta\left[\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec}3\theta\right]$$

$$T_2 = -\tfrac{1}{2}\sec\theta\left[\operatorname{cosec}3\theta + \operatorname{cosec}5\theta\right]$$

$\vdots$

$$T_n = (-1)^{n+1}\left(\tfrac{1}{2}\sec\theta\right)\left[\operatorname{cosec}(2n-1)\theta + \operatorname{cosec}(2n+1)\theta\right]$$

$$S_n = \tfrac{1}{2}\sec\theta\left[\operatorname{cosec}\theta + (-1)^{n+1}\operatorname{cosec}(2n+1)\theta\right].$$

(5) மதிப்பு காண்க

$S_n = \tan\theta \sec 2\theta + \tan 2\theta \sec 4\theta + \tan 4\theta \sec 8\theta + \cdots$

தீர்வு :-

$T_n = \tan(2^{n-1}\theta)\sec(2^n\theta)$

$= \dfrac{\sin(2^{n-1}\theta)}{\cos(2^{n-1}\theta)\cos(2^n\theta)}$

$= \dfrac{\sin(2^n\theta - 2^{n-1}\theta)}{\cos(2^{n-1}\theta)\cos(2^n\theta)}$

$= \dfrac{\sin(2^n\theta)\cos(2^{n-1}\theta) - \cos(2^n\theta)\sin(2^{n-1}\theta)}{\cos(2^{n-1}\theta)\cos(2^n\theta)}.$

$T_n = \tan(2^n\theta) - \tan(2^{n-1}\theta)$

$T_1 = \tan 2\theta - \tan\theta$

$T_2 = \tan 4\theta - \tan 2\theta$

$\vdots$

$T_n = \tan(2^n\theta) - \tan(2^{n-1}\theta)$

$S_n = \tan(2^n\theta) - \tan\theta$

---

(6) $S_n = \tan x \tan(x+y) + \tan(x+y)\tan(x+2y) + \tan(x+2y)\tan(x+3y) + \cdots$ மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :-

$T_n = \tan[x+(n-1)y]\tan(x+ny)$

$\tan y = \tan[\overline{x+ny} - \overline{(x+(n-1)y)}]$

$= \dfrac{\tan(x+ny) - \tan(x+(n-1)y)}{1+\tan(x+ny)\tan(x+(n-1)y)}$

$1+\tan(x+ny)\tan(x+(n-1)y) = \frac{1}{\tan y}[\tan(x+ny) - \tan(x+(n-1)y]$

$1+\tan(x+ny)\tan(x+(n-1)y) = \cot y[\tan(x+ny) - \tan(x+(n-1)y]$

$1+T_n = \cot y[\tan(x+ny) - \tan\{x+(n-1)\}]$

$T_n = \cot y[\tan(x+ny) - \tan\{x+(n-1)y\}]$

$T_n = \cot y\,[\tan(x+ny) - \tan\{x+(n-1)y\}]$

$T_1 = \cot y\,[\tan(x+y) - \tan x] - 1$

$T_2 = \cot y\,[\tan(x+2y) - \tan(x+y)] - 1$

$\vdots$

$T_n = \cot y\,[\tan(x+ny) - \tan(x+(n-1)y)] - 1$

$S_n = \cot y\,[\tan(x+ny) - \tan x] - n.$

---

(7) $S_n = \tan^{-1}(1/3) + \tan^{-1}(1/7) + \tan^{-1}(1/13) + \cdots$

மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :-

$$S_n = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+1\cdot 2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+2\cdot 3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+3\cdot 4}\right) + \cdots$$

$$\therefore T_n = \tan^{-1}\left[\frac{1}{1+n(n+1)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{n+1-n}{1+n(n+1)}\right]$$

$T_n = \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n)$

$T_1 = \tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(1)$

$T_2 = \tan^{-1}(3) - \tan^{-1}(2)$

$\vdots$

$T_n = \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n)$

$$\therefore S_n = \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(1) = \tan^{-1}\left[\frac{(n+1)-1}{1+(n+1)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{n}{n+2}\right].$$

---

(8) $$S_n = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+1+1^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+2+2^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+3+3^2}\right) + \cdots$$

மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :-

$$T_n = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+n(n+1)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{n+1-n}{1+n(n+1)}\right)$$

$$T_n = \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n)$$

$$\therefore S_n = \tan^{-1}\left(\frac{n}{n+2}\right).$$

---

(9) $\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}2\alpha + \operatorname{cosec}2^2\alpha + \dots$ மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :-

$$T_1 = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha/2}{\sin\alpha\sin\alpha/2} = \frac{\sin(\alpha-\alpha/2)}{\sin\alpha\sin\alpha/2}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha/2 - \cos\alpha\sin\alpha/2}{\sin\alpha\sin\alpha/2}$$

$$T_1 = \cot\alpha/2 - \cot\alpha$$

$$T_2 = \cot\alpha - \cot 2\alpha$$

$$T_3 = \cot 2\alpha - \cot 2^2\alpha$$

$$\vdots$$

$$T_n = \cot(2^{n-2}\alpha) - \cot(2^{n-1}\alpha)$$

$$\therefore S_n = \cot\alpha/2 - \cot(2^{n-1}\alpha).$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :-

(1) $S_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots$ மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :-

$$2\sin(\alpha/2)\,S_n = 2\sin\alpha\sin(\alpha/2) + 2\sin 2\alpha\sin(\alpha/2) + \dots + 2\sin n\alpha\sin(\alpha/2)$$

$$= [\cos(\alpha/2) - \cos(3\alpha/2)] + [\cos(3\alpha/2) - \cos(5\alpha/2)] + \dots + \left[\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right]$$

$$= \cos(\alpha/2) - \cos[(2n+1)\alpha/2]$$

$$= 2\sin\left[\frac{(n+1)\alpha}{2}\right]\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin(\alpha/2)}.$$

(2) $\tan n\alpha = \dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots}$ மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :-

$$R.H.S = \frac{\sin\left[\alpha + \frac{(n-1)2\alpha}{2}\right]\sin\left(\frac{n2\alpha}{2}\right)\Big/\sin\alpha}{\cos\left[\alpha + \frac{(n-1)2\alpha}{2}\right]\sin\left(\frac{n2\alpha}{2}\right)\Big/\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin[\alpha + (n-1)\alpha]\sin(n\alpha)}{\cos[\alpha + (n-1)\alpha]\sin(n\alpha)}$$

$$= \frac{\sin^2 n\alpha}{\cos n\alpha \sin n\alpha}$$

$$= \tan n\alpha .$$

---

(3) Find $S_n = \sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \sin 4\alpha + \cdots$ மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :-

$$\sin(\pi + 2\alpha) = -\sin 2\alpha$$

$$\sin(2\pi + 3\alpha) = \sin 3\alpha \;;\; \sin(3\pi + 4\alpha) = -\sin 4\alpha \ldots \text{ etc.}$$

$$\therefore S_n = \sin\alpha + \sin(\pi + 2\alpha) + \sin(2\pi + 3\alpha) + \sin(3\pi + 4\alpha) + \cdots$$

$$= \sin\alpha + \sin[\alpha + (\alpha + \pi)] + \sin[\alpha + 2(\alpha + \pi)] + \cdots$$

$$\therefore S_n = \frac{\sin\left[\alpha + \frac{(n-1)(\pi-\alpha)}{2}\right]\sin\left[\frac{n(\pi+\alpha)}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\pi+\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left[\alpha + \frac{(n-1)(\pi-\alpha)}{2}\right]\sin\left[\frac{n(\pi+\alpha)}{2}\right]}{\cos(\alpha/2)} .$$

---

(4) $S_n = \cos\alpha\cos 3\alpha + \cos 3\alpha\cos 5\alpha + \cos 5\alpha\cos 7\alpha + \cdots$ மதிப்பு காண்க

தீர்வு :-

$$S_n = (1/2)(\cos 4\alpha + \cos 2\alpha) + (1/2)(\cos 8\alpha + \cos 2\alpha) + \cdots$$

$$= (1/2)\left[n\cos 2\alpha + (\cos 4\alpha + \cos 8\alpha + \cos 12\alpha + \dots)\right]$$

$$= 1/2\left[n\cos 2\alpha + \frac{\cos\left(4\alpha + \frac{(n-1)4\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{4n\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha}\right]$$

$$= 1/2\left[n\cos 2\alpha + \frac{\cos\left[2(n+1)\alpha\right]\sin\left[2n\alpha\right]}{\sin 2\alpha}\right].$$

---

(5) மதிப்பு காண்க, $S_n = \cos^3\alpha + \cos^3 2\alpha + \cos^3 3\alpha + \dots$

தீர்வு :-

$$S_n = 1/4\left[\cos 3\alpha + 3\cos\alpha\right] + 1/4\left[\cos 6\alpha + 3\cos 2\alpha\right] + \dots$$

$$= (1/4)\left[\cos 3\alpha + \cos 6\alpha + \dots\right] + (3/4)(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots)$$

$$= 1/4\left[\frac{\cos\left(3\alpha + \frac{(n-1)3\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n3\alpha}{2}\right)}{\sin(3\alpha/2)}\right] + 3/4\left[\frac{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin(\alpha/2)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\cos\left[(3/2)(n+1)\alpha\right]\sin\left[(3/2)n\alpha\right]}{\sin(\alpha/2)}\right] + \frac{3}{4}\left[\frac{\cos\left[(n+1)\alpha/2\right]\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right].$$

கிரிகோரியின் தொடர் :-

தேற்றம் :-

$-1/4\,\pi \le \theta \le \pi/4$, எனில் நிறுவுக

$$\theta = \tan\theta - 1/3\tan^3\theta + 1/5\tan^5\theta + \dots$$

தீர்வு :-

$$1 + i\tan\theta = 1 + i\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$1 + i\tan\theta = (\sec\theta)\, e^{i\theta}$$

$$\log(1 + i\tan\theta) = \log(\sec\theta) + \log(e^{i\theta})$$

$$= \log\sec\theta + i\theta \rightarrow (1)$$

$$-\tfrac{1}{4}\pi \le \theta \le \pi/4, \quad |\tan\theta| \le 1,$$

$$|i\tan\theta| = |i|\,|\tan\theta| \le 1$$

$\log(1 + i\tan\theta)$ விரிவுபடுத்தி எழுதவும்

$$(i\tan\theta) - \tfrac{1}{2}(i\tan\theta)^2 + \tfrac{1}{3}(i\tan\theta)^3 - \tfrac{1}{4}(i\tan\theta)^4 + \cdots = \log(\sec\theta) + i\theta$$

$$i\tan\theta + \tfrac{1}{2}\tan^2\theta - \tfrac{1}{3}i\tan^3\theta - \tfrac{1}{4}\tan^4\theta + \cdots = \log(\sec\theta) + i\theta$$

இருபுறமும் கற்பனை பகுதியை ஒப்பிடுக.

$$\theta = \tan\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + \tfrac{1}{5}\tan^5\theta - \cdots$$

<u>எடுத்துக்காட்டுகள்</u>

(1) x ஆனது $-\pi/4$ மற்றும் $\pi/4$ இடையில் இருப்பின்,

$$\tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \cdots = \tanh x + \frac{\tanh^3 x}{3} + \frac{\tanh^5 x}{5}$$

என நிறுவு.

தீர்வு :- $\tanh x = y$

$$R.H.S = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \cdots = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \tanh^{-1}(y)$$

$$= \tanh^{-1}(\tanh x) = x \rightarrow (1)$$

put $\tan x = z$

$$L.H.S = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \tan^{-1}(z) = \tan^{-1}(\tan x)$$

$$= x \rightarrow (2)$$

1 மற்றும் 2 ஐ சேர்க்க

$$\tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \cdots = \tanh x + \frac{\tanh^3 x}{3} + \frac{\tanh^5 x}{5}$$

(2) $\pi = 2\sqrt{3}\left[1 - 1/3^2 + 1/5 \cdot 1/3^2 - 1/7 \cdot 1/3^2 + \cdots\right]$ என நிறுவ

தீர்வு :-

$$R.H.S = 2\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^2} + \cdots\right]$$

$$= 2\sqrt{3}\sqrt{3}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3^{5/2}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^{5/2}} - \cdots\right]$$

$$= 6\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 - \cdots\right]$$

$$= 6\tan^{-1}(1/\sqrt{3})$$

$$= 6(\pi/6)$$

$$= \pi$$

---

(3) θ என்பது $1/4\,\pi$ மற்றும் $3/4\,\pi$ இடையில் இருந்தால்,

$\theta = 1/2\,\pi - \cot\theta + 1/3\cot^3\theta - 1/5\cot^5\theta + \cdots$ என நிறுவ.

தீர்வு :-

$$1/4\,\pi \le \theta \le 3/4\,\pi$$

$$\therefore 1/4\,\pi - 1/2\,\pi \le \theta - 1/2\,\pi \le 3/4\,\pi - 1/2\,\pi$$

$$-1/4\,\pi \le \theta - 1/2\,\pi \le 1/4\,\pi$$

கிரிகோரியின் தொடரின் மேல், $\theta - 1/2\,\pi$ என்பது

$$\theta - 1/2\,\pi = \tan(\theta - 1/2\,\pi) - 1/3\tan^3(\theta - 1/2\,\pi) + 1/5\tan^5(\theta - 1/2\,\pi) + \cdots$$

$$= -\cot\theta + 1/3\cot^3\theta - 1/5\cot^5\theta + \cdots$$

$$\theta = 1/2\,\pi - \cot\theta + 1/3\cot^3\theta - 1/5\cot^5\theta + \cdots$$

---

(4) $(1 - 3^{-1/2}) - 1/3(1 - 3^{-3/2}) + \frac{1}{5}(1 - 3^{-5/2}) - \cdots = \pi/12$

என நிறுவ.

தீர்வு :-

$$LHS = \left(1-3^{-1/2}\right) - \frac{1}{3}\left(1-3^{-3/2}\right) + \frac{1}{5}\left(1-3^{-5/2}\right) \cdots$$

$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{3^2\sqrt{3}}\right) \cdots$$

$$= \left[1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots\right] - \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 \cdots\right]$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(1/\sqrt{3})$$

$$= \pi/4 - \pi/6$$

$$= \pi/12$$

$$\therefore S = \pi/12.$$