Inst Hour	: 4
Credit	: 4
Code	: 18K1M02

SEMESTER : I
CORE COURSE : II

ANALYTICAL GEOMETRY OF 3 - DIMENSIONS AND INTEGRAL CALCULUS

UNIT 1:
Coplanar lines – Shortest distance between two skew lines- Equation of the line of shortest distance.
(Chapter III Sections 7& 8 of Text Book 1)

UNIT 2:
Sphere – Standard equations –Length of tangent from any point–Sphere passing through a given circle – finding the centre and radius of the circle of intersection of a sphere and a plane – Tangent plane.
(Chapter IV Sections 1-8 of Text Book 1)

UNIT 3:
Properties of Definite Integrals– Integration by parts– reduction formula
(Chapter I Sections 11, 12 &13 of Text Book 2)

UNIT 4:
Double integrals – changing the order of Integration – Triple Integrals.
(Chapter V Sections 2.1, 2.2, 4 of Text Book 2)

UNIT 5:
Beta & Gamma functions and the relation between them-Integration using Beta & Gamma functions.
(Chapter VII Sections 2.1, 2.2, 2.3,3, 4 of Text Book 2)

Text Book(s)

[1] T.K.Manickavasagam Pillai , Natarajan, A Text book of Analytical Geometry Part II (Three Dimensions) S.V Publications – 2010 - Revised Edition.

[2] S.Narayanan ,T.K.Manickavasagam Pillai, Calculus Volume II S.V Publications 2015 Edition.

Books for Reference

[1] P.Duraipandian & Laxmi Duraipandian. Analytical Geometry

[2] Shanti Narayanan, Differential & Integral Calculus

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

9.3.18
HOD of Mathematics

9/3/18

18K1M02

தொகை நுண்கணிதம் மற்றும் முப்பரிமாண பகுமுறை வடிவியல்

அலகு – I

கோப்ளனார் கோடுகள்

ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ள இரண்டு நேர் கோடுகள் கோப்ளனார் கோடுகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. அவை இணையாக இருக்கலாம். அல்லது அவை வெட்டிக்கலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு நேர் கோடுகள் கோப்ளனாராக இருக்க வேண்டிய நிபந்தனை

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

தேற்றம்: கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு நேர் கோடுகள் கோப்ளனாராக இருக்க வேண்டிய நிபந்தனை.

தீர்வு: அவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \longrightarrow (1)$$

$$\frac{x-x_2}{l_1} = \frac{y-y_2}{m_1} = \frac{z-z_2}{n_1} \longrightarrow (2)$$

முதல் கோடு வழியாக ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \longrightarrow (3)$$

$$Al+Bm+Cn=0 \longrightarrow (4)$$

புள்ளி (x_2, y_2, z_2) ஆனது தளம் (2)-ன் மீது உள்ளது.

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \longrightarrow (5)$$

கோடு (2) ஆனது (3)-க்கு உடைய தளத்திற்கு இணையாக

உள்ளது. $Al_1+Bm_1+Cn_1=0 \longrightarrow (6)$

சமன்பாடு (5)(4) மற்றும் (6)-லிருந்து A, B, C-யை நீக்க.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

சமன்பாடு (3)(4) மற்றும் (6)-லிருந்து A, B, C-யை நீக்க கிடைப்பது கோடுகளானது இணைய தேவையான நிபந்தனை.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

$$ax+by+cz+d=0=a_1x+b_1y+c_1z+d_1 \text{ to be}$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0=a_3x+b_3y+c_3z+d_3$$

தொடர்கோடுகள் எனும் சமன்பாடுகள் கோடுகளானது இணைய வேண்டிய நிபந்தனை.

தீர்வு: கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியானது (x_1, y_1, z_1) & $(x_2\ y_2\ z_2)$ என்பதில் உள்ளது.

$$ax+by+cz+d=0$$
$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

$$\therefore\ ax_1+by_1+cz_1+d=0$$
$$a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1=0$$
$$a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2=0$$
$$a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1+d_3=0$$

மேலே உள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து x_1, y_1, z_1-யை நீக்க

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு: 2. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+10}{8} = \frac{z-1}{2}$, $\frac{x+3}{-4} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-4}{1}$

என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனக்காட்டுக. மேலும் அவற்றின் வெட்டும்

வெட்டும் புள்ளியையும் கோட்டின் வழியாக உள்ள தளத்தையும் காண்க.

தீர்வு: இரண்டு கோடுகள் மீது அமையும் புள்ளியைக் காண்க.

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+10}{8} = \frac{z-1}{2} = r$$

$x+1=-3r \quad y+10=8r \quad z-1=2r$

$x=-3r-1 \quad y=8r-10 \quad z=2r+1$

$x=-4r_1-3 \quad y=7r_1-1 \quad z=r_1+4$

கோடுகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன எனில் சமன்பாடுகள்

$-3r-1=-4r_1-3$

$8r-10=7r_1-1$

$2r+1=r_1+4.$

$8r-4r_1=2$

$8r-7r_1=9$

$2r-r_1=3$

மேலும் தீர்வு காணும் போது $r=2$ மற்றும் $r_1=1$ கிடைக்கின்றன.

சமன்பாடு ③ மற்றும் (2)ல் பொருந்துகிறது.

வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $(-7, 6, 5)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+10 & z-1 \\ -3 & 8 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 6x+5y-11z+67=0.$$

தேற்றம்: கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

காணல்.

தீர்வு: இரண்டு கோடுகள் முறையே AB and A'B' என்க

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ மற்றும் } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

Scanned by TapScanner

மேற்கூறிய நிபந்தனை இரண்டு கோடுகளின் மீது செங்குத்தாக உள்ளது.

$$l l_1 + m m_1 + n n_1 = 0$$

$$l l_2 + m m_2 + n n_2 = 0$$

$$\frac{l}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \frac{m}{n_1 l_2 - l_1 n_2} = \frac{n}{l_1 m_2 - l_2 m_1} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}}$$

புள்ளி A-ஐ (x_1, y_1, z_1) கோட்டில் $A'(x_2\ y_2\ z_2)$

$$GH = (x_2\ x_1) l + (y_2 - y_1) m + (z_2 - z_1) n$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1) + (y_2 - y_1)(n l_2 - l_1 n_2) + (z_2 - z_1)(l_1 m_2 - l_2 m_1)}{\sqrt{\Sigma (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\Sigma (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

தளம் AB கோடும் GH, தளம் A'B' கோடும் GH ஆக வெட்டுகின்றன மேற்கூறிய நிபந்தனை.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$ மற்றும் $$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

கோப்ளானார். மேலும் இவற்றிற்கிடையேயான குறுகிய தூரம் பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

<u>எடுத்துக்காட்டு. 1</u> $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{1}$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z+2}{2}$

இவற்றின் இடையேயான குறுகிய தூரம் காண்க.

<u>தீர்வு</u>: கோடுகள் l, m, n -ன் செங்குத்து கோடுகள் திசைகொசைன்கள் என்க.

$$-l + 2m + n = 0$$
$$l + 2m + 2n = 0$$
$$\frac{l}{1} = \frac{m}{3} = \frac{n}{5}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{35}} \quad m = \frac{3}{\sqrt{35}} \quad n = \frac{-5}{\sqrt{35}}.$$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $(3, 4, -2)$ மற்றும் $(4, -7, -2)$ ஆகும்.

குறுகிய தூரத்தின் விழலின் அளவானது

$$\text{குறுகிய தூரம் (SD)} = (3-1)\frac{1}{\sqrt{35}} + (4+7)\frac{3}{\sqrt{35}} + (-2+2)\frac{1}{\sqrt{35}}$$

$$= 2\sqrt{35}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y+7 & z+2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$13x + 4y + 5z - 45 = 0$$

$$3x - y - 10 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு : 2 $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = z-7$ மற்றும் $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = z+1$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையேயான மீச்சிறு தூரம் காண்க. மேலும் மீச்சிறு தூரத்தின் கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

<u>தீர்வு</u>

$$l - 2m + n = 0$$

$$7l - 6m + n = 0.$$

$$\frac{l}{-2+6} = \frac{m}{7-1} = \frac{n}{-6+14} \qquad \frac{l}{4} = \frac{m}{6} = \frac{n}{8}$$

$$l = \frac{4}{\sqrt{116}} \quad m = \frac{6}{\sqrt{116}} \quad n = \frac{8}{\sqrt{116}}$$

மீச்சிறு தூரம் $SD = (3+1)\frac{4}{\sqrt{116}} + (5+1)\frac{6}{\sqrt{116}} + (7+1)\frac{8}{\sqrt{116}}$

$$= \frac{16}{\sqrt{116}} + \frac{36}{\sqrt{116}} + \frac{64}{\sqrt{116}}$$

$$= \sqrt{116}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 7 & -6 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$(x-3)(-16-6) - (y-5)(8-4) + (z-7)(6+8) = 0$$

$$(x+1)(-48-6) - (y+1)(56-4) + (z+1)(42+24)$$

$$-22x - 4y + 14z - 12 = 0$$

$$54x - 52y + 66z = 0$$

[illegible] 3. $\dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m} = \dfrac{z-\gamma}{n}$; $\dfrac{x-\alpha_1}{l_1} = \dfrac{y-\beta_1}{m_1} = \dfrac{z-\gamma_1}{n_1}$

என்ற இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையேயான [illegible] திசைக்கொசைன்கள் முறையே λ, μ, ν என்க. மேலும் [illegible] நீளம் [illegible] அணிக்கோவைகளின் [illegible]

$$\begin{vmatrix} \alpha-\alpha_1 & \beta-\beta_1 & \gamma-\gamma_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

தீர்வு : இரண்டு கோடுகள் முறையே

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} = r \text{ (say)}.$$

$$\frac{x-\alpha_1}{l_1} = \frac{y-\beta_1}{m_1} = \frac{z-\gamma_1}{n_1} = r_1$$

$$x-\alpha = lr \quad y-\beta = mr \quad z-\gamma = nr$$

$$x = \alpha+lr, \quad y = \beta+mr \quad z = \gamma+nr.$$

$(\alpha+lr, \beta+mr, \gamma+nr)$ and $(\alpha_1+l_1r_1, \beta_1+m_1r_1, \gamma_1+n_1r_1)$

d என்பது [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] λ, μ, ν என்க.

$$d\lambda = (\alpha+lr) - (\alpha_1+l_1r_1)$$

$$d\mu = (\beta+mr) - (\beta_1+m_1r_1)$$

$$d\nu = (\gamma+nr) - (\gamma_1+n_1r_1)$$

$$(\alpha-\alpha_1) + lr - l_1r_1 - d\lambda = 0$$

$$\beta-\beta_1 + mr - m_1r_1 - d\mu = 0$$

$$\gamma-\gamma_1 + nr - n_1r_1 - d\nu = 0$$

$$\frac{r}{\begin{vmatrix} l_1 & \lambda & \alpha-\alpha_1 \\ m_1 & \mu & \beta-\beta_1 \\ n_1 & \nu & \gamma-\gamma_1 \end{vmatrix}} = \frac{r_1}{\begin{vmatrix} \lambda & \alpha-\alpha_1 & l \\ \mu & \beta-\beta_1 & m \\ \nu & \gamma-\gamma_1 & n \end{vmatrix}} = \frac{d}{\begin{vmatrix} \alpha-\alpha_1 & l & l_1 \\ \beta-\beta_1 & m & m_1 \\ \gamma-\gamma_1 & n & n_1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} l & l_1 & \lambda \\ m & m_1 & \mu \\ n & n_1 & \nu \end{vmatrix}}$$

$$d = \begin{vmatrix} \alpha-\alpha_1 & l & l_1 \\ \beta-\beta_1 & m & m_1 \\ \gamma-\gamma_1 & n & n_1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} l & l_1 & \lambda \\ m & m_1 & \mu \\ n & n_1 & \nu \end{vmatrix}$$

கொடுத்த கோடுகள் இரண்டிற்கும் செங்குத்து கோட்டின் திசைக்கொசைன்கள்.

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

$$l_1\lambda + m_1\mu + n_1\nu = 0$$

$$\frac{\lambda}{mn_1 - m_1n} = \frac{\mu}{nl_1 - ln_1} = \frac{\nu}{lm_1 - ml_1} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma (mn_1 - m_1n)^2}}$$

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \lambda(mn_1 - m_1n) + \mu(nl_1 - ln_1) + \nu(lm_1 - ml_1)$$

$$= \frac{(mn_1 - m_1n)^2 + (nl_1 - ln_1)^2 + (lm_1 - ml_1)^2}{\sqrt{\Sigma (mn_1 - m_1n)^2}}$$

$$SD = \begin{vmatrix} \alpha-\alpha_1 & \beta-\beta_1 & \gamma-\gamma_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} \div \sqrt{\Sigma (mn_1 - m_1n)^2}$$

அலகு - II கோளம்

கோளம்: நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாறாத தொலைவில் இயங்கும் புள்ளி கோளம் எனப்படுகிறது. கோளத்தின் மையம் என்பது நிலையான புள்ளி மற்றும் ஆரம் என்பது மாறாத தொலைவு

கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

கோளத்தின் மையம் $(-u,-v,-w)$

கோளத்தின் ஆரம் $\sqrt{(-u)^2+(-v)^2+(-w)^2-d}$.

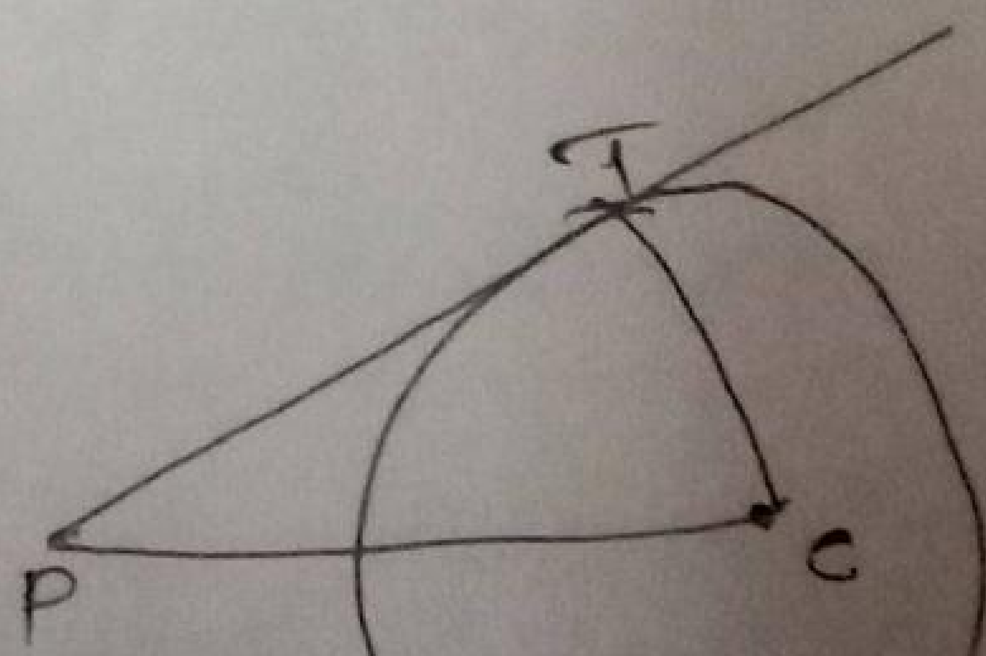
மையம் மற்றும் ஆரம் கொடுக்கப்பட்டால், கோளத்தின் சமன்பாடு

$$CP^2 = r^2$$
$$CP^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$$

கோளத்தின் பண்புகள்.

1. x, y, z -ன் படியானது இரண்டாக உள்ளது
2. x^2, y^2, z^2 -ன் கெழுக்கள் சமமாக உள்ளது.
3. xy, yz, zx என்பது உறுப்புகள் இல்லை.

(x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து கோளத்திற்கு தொடுகோட்டின் நீளம்.



தீர்வு: P என்பது புள்ளி (x_1, y_1, z_1) என்க.

C என்பது கோளத்தின் மையம்.

PT என்பது தொடுகோடு என்க.

கோளத்தின் மையம் C-யின் ஆயங்கள் $(-u,-v,-w)$ என்க.

கோளத்தின் ஆரமானது CT, அது $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ -க்கு சமமாக உள்ளது.

CT ஆனது PT -க்கு செங்குத்தாக உள்ளது

$$\boxed{PT^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d.}$$

குறிப்பு:
PT^2-ன் மதிப்பு கட்டத்தை பொறுத்து P-இன் சக்தி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

நிலை:1 (x,y,z) என்ற புள்ளியானது கோளத்தின் உட்புறம், வெளிப்புறம் மற்றும் அதன் மேல் அமைந்திருக்கின்றன.

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d >=< 0.$$

நிலை:2 d நேர்மறையாக இருக்குமானால் ஆதியானது கோளத்தின் வெளிப்புறம் உள்ளது. d எதிர்மறையாக இருக்குமானால் ஆதியானது கோளத்தின் உட்புறத்தில் உள்ளது. $d=0$ என்றால் ஆதியானது கோளத்தின் மேல் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு:1 கோளத்தின் மையம் $(-1,2,-3)$ மற்றும் ஆரம் 3 அலகு எனில் கோளத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு: கோளத்தின் சமன்பாடு

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3^2$$

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+5=0$$

எடுத்துக்காட்டு:2 $2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z-15=0$ என்ற கோளத்தின் [illegible] மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.

தீர்வு: $2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z-15=0$

$\div 2$, $x^2+y^2+z^2-x+2y+z-15/2=0$

மையம் $(-u,-v,-w)$

$u = +1/2 \times x$-ன் கெழுவு

$v = +1/2 \times y$-ன் கெழுவு

$w = 1/2 \times z$-ன் கெழுவு

Scanned by TapScanner

மையம் $= (-u, -v, -w) = \left(-\frac{1}{2}(-1), -\frac{1}{2}(2), -\frac{1}{2}(1)\right)$

மையம் $\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$

radius ஆரம் $r = \sqrt{(-u)^2+(-v)^2+(-w)^2-d}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}+\frac{15}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3.$

எடுத்துக்காட்டு : 3 $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$ என்ற கோளத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.

Sol : $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$ -ன்

மையம் $(-u, -v, -w)$: $\left(-\frac{1}{2} \times x\text{-ன் கெழுக்கள்}, -\frac{1}{2} \times y\text{-ன் கெழு}, -\frac{1}{2} \times z\text{-ன் கெழு}\right)$

$= \left(-\frac{1}{2} \times (2), -\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(-6)\right)$

$C = (-1, 2, 3)$

ஆரம் $r = \sqrt{[-(u)]^2+(-v)^2+(-w)^2-d}$

$= \sqrt{(-1)^2+2^2+3^2-5} = \sqrt{1+4+9-5}$

$r = 3.$

எடுத்துக்காட்டு : 4 : மையம் $(1,1,1)$ மற்றும் புள்ளி $(2,0,3)$ என்ற புள்ளியின் வழியாக செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு : கோளத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

$x^2+y^2+z^2+2(-1)x+2(-1)y+2(-1)z+d=0$

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+d=0 \quad \text{—(1)}$

புள்ளி $(2,0,3)$ ஆனது சமன்பாடு (1)-ன் வழியாக செல்கிறது.

Scanned by TapScanner

$x^2 . 2 . 2$

$$(2)^2+(0)^2+(3)^2-2(2)-2(0)-2(3)+d=0$$

$$4+9-4-6+d=0$$

$$\boxed{d=-3}$$

∴ கோளத்தின் சமன்பாடு.

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-3=0.$$

எடுத்துக்காட்டு : 5 : $(1,-1,-1)$ மற்றும் $(-3,4,5)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோளத்தின் விட்டம் காண்க.

தீர்வு : (x_1,y_1,z_1) & (x_2,y_2,z_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோளத்தின் விட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0.$$

புள்ளிகள் $\underset{x_1\ y_1\ z_1}{(1,-1,-1)}$ $\underset{x_2\ y_2\ z_2}{(-3,4,5)}$

$$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-4)+(z+1)(z-5)=0$$

$$x^2+2x-3+y^2-3y-4+z^2-4z-5=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2x-3y-4z-12=0.$$

எடுத்துக்காட்டு : 6 $(6,-1,2)$ புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டை கண்டுபிடி தளத்தை $(2x-y+2z-2=0)$ தொடும் எனக் கொண்டால்.

தீர்வு : கோளத்தின் ஆரமானது தளத்திற்கு செங்குத்து தூரம் ஆகும்.

$$\text{கோளத்தின் ஆரமானது} = \frac{2(-6)-(-1)+2(2)-2}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+2^2}}$$

$$r=\frac{12+1+4-2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{15}{3} = 5$$

கோளத்தின் சமன்பாடு

$$(x-6)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5^2$$

Scanned by TapScanner

$x^2+y^2+z^2-12x+2y-4z+16=0$

எடுத்துக்காட்டு 7: (2,3,1)(5,−1,2)(4,3,−1) மற்றும் (2,5,3) என்ற நான்கு புள்ளிகள் வழியாக செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு: கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad (1)$$

(2,3,1) என்ற புள்ளி சமன் (1)-ன் வழியாக செல்கிறது.

$$2^2+3^2+1^2+2u(2)+2v(3)+2w(1)+d=0$$

$$4u+6v+2w+d=-14 \quad (2)$$

(5,−1,2) என்ற புள்ளி சமன் (1)-ன் வழியாக செல்கிறது.

$$25+1+4+10u-2v+4w+d=0$$

$$10u-2v+4w+d=-30 \quad (3)$$

(4,3,−1) என்ற புள்ளி சமன் (1)-ன் வழியாக செல்கிறது.

$$16+9+1+8u+6v-2w+d=0$$

$$8u+6v-2w+d=-26 \quad (4)$$

(2,5,3) என்ற புள்ளி சமன் (1)-ன் வழியாக செல்கிறது.

$$4+25+9+4u+10v+6w+d=0.$$

$$4u+10v+6w+d=-38.$$

சமன்பாடு (2), (3), (4) மற்றும் (5) ஐ தீர்க்க.

$$u=-\frac{47}{8} \quad v=-\frac{25}{8} \quad w=-\frac{23}{8}, \quad d=34$$

கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-\frac{47}{4}x-\frac{25}{4}y-\frac{23}{4}z+34=0$$

$$4x^2+4y^2+4z^2-47x-25y-23z+136=0$$

எடுத்துக்காட்டு 8: கோளத்தின் மையம் (1,2,3) மற்றும் விட்டத்தின் ஒரு முனை (2,1,3) எனில் அந்த கோளத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு: விட்டத்தின் ஒரு முனை (2,1,3)

கோளத்தின் ஆரம் $= \sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2+(3-3)^2}$

$= \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 2$

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14 = 2$

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+12 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 9: நிலையான ஆரம் k-ஐ உடைய கோளம் ஆதியின் வழியாக சென்று A, B, C-யில் அச்சுகளை சந்திக்கிறது. முக்கோணம் A, B, C-ன் நடுக்கோட்டு மையம் $9(x^2+y^2+z^2) = 4k^2$ -ன் மீது அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு: கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$.

ஆதியின் வழியாக செல்வதால் $d=0$

k என்பது கோளத்தின் ஆரம் எனில்,

$k^2 = u^2+v^2+w^2+d$

$k^2 = u^2+v^2+w^2$ —— (1)

கோளமானது x-அச்சை சந்திக்கும் இடம் புள்ளியானது

$x^2+2ux = 0$.

$x(x+2u) = 0$ $x=0$, $x=-2u$.

A-ன் ஆயத்தொலைவு $(-2u, 0, 0)$

இதே போல் B-ன் ஆயத்தொலைவு $(0, -2v, 0)$

C-ன் ஆயத்தொலைவு $(0, 0, -2w)$

முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டு புள்ளியானது.

$$\frac{-2u+0+0}{3} = x_1, \quad \frac{0-2v+0}{3} = y, \quad \frac{0+0-2w}{3} = z$$

$$u = \frac{-3x_1}{2} \quad v = \frac{-3y_1}{2} \quad w = \frac{-3z_1}{2}.$$

சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட,

$$\frac{9x_1^2}{4} + \frac{9y_1^2}{4} + \frac{9z_1^2}{4} = 6^2.$$

$$9x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 46^2$$

எடுத்துக்காட்டு :10 ஒரு தளம் ஒரு நிலையான புள்ளி (a,b,c) வழியாக சென்று A, B, C-ல் உள்ள அச்சுகளை வெட்டுகிறது. $OABC$ கோளத்தின் மையத்தின் தடம் $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு: தளத்தின் சமன்பாடானது $lx+my+nz=p$ என்க.

இது (a,b,c) வழியாக செல்கிறது

$$(la+mb+nc) = p \longrightarrow (1)$$

தளம் $lx+my+nz=p$ ஆனது x- அச்சை சந்திக்கும் போது ஒருபுள்ளி ஆய அச்சுகள் முறையே.

$$\left(\frac{p}{l},0,0\right) \left(0,\frac{p}{m},0\right) \left(0,0,\frac{p}{n}\right)$$

இப்புள்ளிகள் கோளம் $OABC$-ன் வழியாக செல்கிறது.

$$(0,0,0) \left(\frac{p}{l},0,0\right) \left(0,\frac{p}{m},0\right) \text{ மற்றும் } \left(0,0,\frac{p}{n}\right)$$

$$x^2+y^2+z^2 - \frac{p}{l}x - \frac{p}{m}y - \frac{p}{n}z = 0$$

(x_1,y_1,z_1) என்பது கோளத்தின் மையம் என்க.

$$x_1 = \frac{p}{2l} \quad y_1 = \frac{p}{2m}, \quad z_1 = \frac{p}{2n}$$

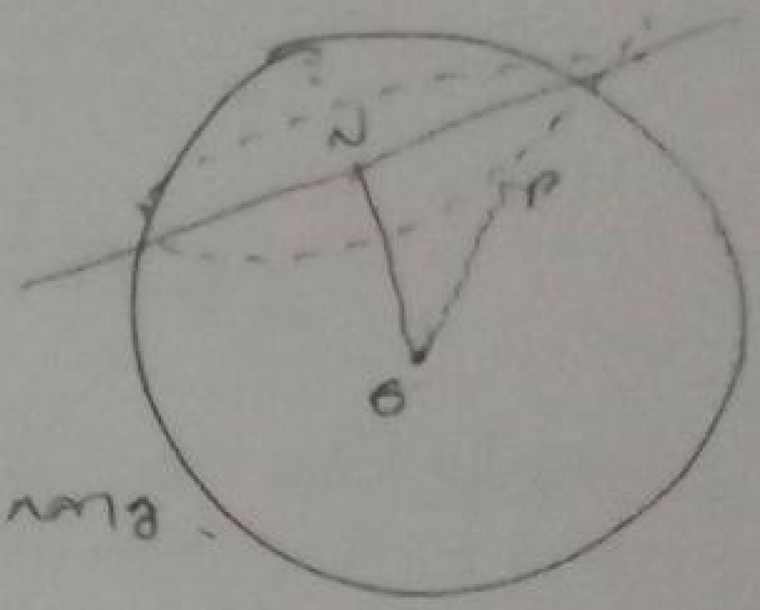
$$l = p/2x_1, \quad m = p/2y_1, \quad n = p/2z_1,$$

l, m, n மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட

$$\frac{pa}{2x_1}+\frac{pb}{2y_1}+\frac{pc}{2z_1}=p \quad (\text{i.e.}) \quad \frac{a}{x_1}+\frac{b}{y_1}+\frac{c}{z_1}=2$$

புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ன் $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$

வரையறை: கோளத்தின் ஒரு தளவெட்டானது வட்டம் என காட்டுக.



'O' என்பது கோளத்தின் மையம் என்க

'r' என்பது கோளத்தின் ஆரம் என்க.

P என்பது புள்ளி கோளத்திலும், தளத்திலும் உள்ளது.

OP = கோளத்தின் ஆரம் என்க.

ON-யை செங்குத்தாக தளத்திற்கு வரைக.

$$OP^2 - ON^2 = NP^2$$

$$NP^2 = r^2 - ON^2$$

மேலும் N என்பது நிலையான புள்ளி

ON என்பது மாறிலி.

NP = மாறிலி

P-ன் நியமப்பாதை என்பது ஒரு வட்டம், அதன் மையம் N கோளத்தின் மையத்திலிருந்து தளத்திற்கு செங்குத்தாக வரைந்தால் கிடைக்கும் வட்டம் - ஒரு சிறிய வட்டம் ஆகும்.

பெரிய வட்டம்: தளம் கோளத்தின் மையத்தின் வழியாக சென்றால் அந்த வட்டம் அதனுடைய ஆரம் r எனில் ஒரு பெரிய வட்டம் என அழைக்கப்படுகிறது

கொடுக்கப்பட்ட வட்டம் வழியாக செல்லும் கோளங்களின் சமன்பாடு.

சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d+k(lx+my+nz-p)=0$.

k என்பது மாறிலி. கோளத்தின் வெட்டுத்தளம் என்ற புள்ளியை அடிப்படையாகக் கொண்டு கிடைக்கிறது,

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

$$lx+my+nz=p$$

இரண்டு கோளங்களின் வெட்டுப்பகுதி ஒரு வட்டம் ஆகும்.

$$S_1: x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

$$S_2 = x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1=0$$

$$S_1-S_2 = 2x(u-u_1)+2y(v-v_1)+2z(w-w_1)+d-d_1=0.$$

இதுவே பொது நாண் தளம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : 1 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+7=0$, $2x-y+2z=5$ என்ற சமன்பாட்டின் கோளத்தின் சமன்பாடு மற்றும் ஒரு பெரிய வட்டம் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் வழியாக செல்கிறது.

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+7+k(2x-y+2z-5)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+7+2kx-ky+2kz-5k=0$$

$$x^2+y^2+z^2+(2k-2)x+(4-k)y+(2k-6)z+7-5k=0$$

மையம் $(-u,-v,-w) = \left(-\frac{(2k-2)}{2}, -\frac{(4-k)}{2}, -\frac{(2k-6)}{2}\right)$

வெட்டுத்தளத்தின் மையமானது கோளத்தின் மையத்தின் வழியாகச் செல்கிறது.

$\left(\frac{2-2k}{2}, \frac{k-4}{2}, \frac{6-2k}{2}\right)$ தளமானது $2x-y+2z-5=0$

Scanned by TapScanner

$$2\left(\frac{2-2k}{2}\right)-\left(\frac{k-4}{2}\right)+2\left(\frac{6-2k}{2}\right)-5=0$$

$$2-2k-\frac{k}{2}+2+6-2k-5=0$$

$$-4k-\frac{k}{2}+5=0$$

$$-\frac{9k}{2}=-5 \quad k=10/9$$

∴ கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+7+\frac{2}{9}(2x-y-2z-5)=0$$

$$9x^2+9y^2+9z^2-18x+36y-54z+63+4x-2y-4z-10=0$$

<u>எடுத்துக்காட்டு 2</u> : $x^2+y^2+z^2-2x-4y=0$, $x+2y+3z=8$ என்ற வட்டத்தின் வழியாக செல்லும் $4x+3y=25$ என்ற தளத்தை தொடும் கோளத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

<u>தீர்வு</u> : கோளத்தின் சமன்பாடானது

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+k(x+2y+3z-8)=0 \quad -(1)$$

$$x^2+y^2+z^2-(2-k)x-(4-2k)y+3kz-8k=0$$

கோளத்தின் மையம் $\left(\frac{2-k}{2}, \frac{4-2k}{2}, -\frac{3k}{2}\right)$

கோளத்தின் ஆரம் $\left(\left(\frac{2-k}{2}\right)^2+\left(\frac{4-2k}{2}\right)^2+\left(\frac{-3k}{2}\right)^2+8k\right)^{1/2}$

$$r=\left\{\frac{7k^2+6k+10}{2}\right\}^{1/2}$$

தளமானது கோளத்தின் மையத்திலிருந்து ஆரத்திற்கு சமம்.

$$\frac{4\left(\frac{2-k}{2}\right)+3\left(\frac{4-2k}{2}\right)-25}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=\left\{\frac{7k^2+6k+10}{2}\right\}^{1/2}$$

$$\frac{4 - 2k + 6 - 3k - 25}{5} = \left\{ \frac{7k^2 + 6k + 10}{2} \right\}^{1/2}$$

$$-(k+3) = \left\{ \frac{7k^2 + 6k + 10}{2} \right\}^{1/2}$$

$$2(k+3)^2 = 7k^2 + 6k + 10$$

$$k = 2 \text{ or } -4/5.$$

k-ன் மதிப்பை சமன்பாடு (1) ல் பிரதியிட,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2(x + 2y + 2z - 8) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 16 = 0 \text{ and}$$

$$5(x^2 + y^2 + z^2) - 14x - 88y + 32 = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 3. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ என்ற தளமானது அச்சுகளை சந்திக்கும் புள்ளிகள் A, B, C என்க. முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் மையத்தின் நியமப்பாதை காண்க.

தீர்வு: புள்ளிகள் (A, B, C - என்பன $(a,0,0)$ $(0,b,0)$ $(0,0,c)$

O என்பது ஆதிப்புள்ளி.

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$$

முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் ஆனது

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

கோளத்தின் மையம் $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

தளம் $\left(\frac{a}{2}, b/2, c/2\right)$ என்பது தளத்தின் வழியாக செல்லும் வட்டத்தின் மையம்

தளத்திற்கு செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - a/2}{1/a} = \frac{y - b/2}{1/b} = \frac{z - c/2}{1/c}.$$

இதன் மீது உள்ள புள்ளி $\left(\frac{a}{2} + \frac{\lambda}{a}, \frac{b}{2} + \frac{\lambda}{b}, \frac{c}{2} + \frac{\lambda}{c}\right)$

Scanned by TapScanner

அப்புள்ளியானது தளத்தில் உள்ளது எனில்

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a}{2}+\frac{\lambda}{a}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{b}{2}+\frac{\lambda}{b}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{a}{2}+\frac{\lambda}{c}\right)=1$$

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lambda=-\frac{1}{2(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})}$$

மேலும் வட்டத்தின் மையப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\frac{\frac{a}{2}(b^{-2}+c^{-2})}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}},\ \frac{\frac{b}{2}(c^{-2}+a^{-2})}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}},\ \frac{\frac{c}{2}(a^{-2}+b^{-2})}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}$$

R என்பது வட்டத்தின் ஆரம். r என்பது கோளத்தின் ஆரம் எனில்

$$R^2=r^2-d^2$$

ஆனால் $r^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}$

$$R^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-\frac{1}{4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-a^2b^2c^2}{4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}$$

$$=\frac{(b^2+c^2)b^2c^2+(c^2+a^2)(c^2a^2)+(a^2+b^2)a^2b^2+2a^2b^2c^2}{4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}$$

$$R=\frac{1}{2}\left\{\frac{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\right\}^{1/2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : $(1,-2,3)$ என்ற புள்ளியை $z=0$, $x^2+y^2+z^2=9$ என்ற வட்டத்தின் வழியாக செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு. வட்டத்தின் வழியாக செல்லும் கோளம்.

$$x^2+y^2+z^2-9+\lambda z=0 \quad \text{---(1)}$$

$(1,-2,3)$ புள்ளி கோளம் (1)-ன் வழியாக செல்கிறது

$$(1+4+9-9)+\lambda(3)=0$$

$$\lambda=-5/3$$

λ-ன் மதிப்பை (1) ல் பிரதியிட

$$(x^2+y^2+z^2-9)-\frac{5}{3}z=0$$

$$3(x^2+y^2+z^2)-5z-27=0.$$

எடுத்துக்காட்டு 8 . $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற கோளத்திற்கு (x_1,y_1,z_1) என்ற புள்ளியில் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு . P என்பது (x_1,y_1,z_1) ன் புள்ளி ஆகும். அது கோளத்தின் மேல் உள்ளது.

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d=0 \quad \text{---(1)}$$

(x_1,y_1,z_1) என்ற புள்ளி வழியாக செல்லும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

O-ன் மைய புள்ளி $(-u,-v,-w)$

OP-ன் திசை விகிதங்கள் முறையே

$$u+x_1,\ v+y_1,\ w+z_1$$

தளத்தின் சமன்பாடு என்பது

$$(x-x_1)(u+x_1)+(y-y_1)(v+y_1)+(z-z_1)(w+z_1)=0$$

$$xx_1+yy_1+zz_1+ux+vy+wz = x_1^2+y_1^2+z_1^2+ux_1+vy_1+wz_1$$

சமன்பாடு (1).

$x_1^2+y_1^2+z_1^2+ux_1+vy_1+wz_1 = -ux_1-vy_1-wz_1-d$

ஆகவே தொடுதளச் சமன்பாடு

$xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$.

கிளை: கோளம் $x^2+y^2+z^2=r^2$ என் புள்ளி (x_1,y_1,z_1)-ல் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1+zz_1=r^2$

எ.கா: 1 $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$ என்ற கோளத்தின் தொடு தளம் $2x-y-2z=16$ என்று தொடுப்புள்ளியை காண்க.

தீர்வு: கோளத்தின் மையம் $(2,-1,-1)$ ஆரம்

ஆரம் (3)

தளமானது $2x-y-2z-16=0$ '$(2,-1,-1)$' என்ற புள்ளியிலிருந்து செங்குத்து தூரம்.

$$\frac{2(2)-(-1)-2(-1)-16}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{4+1+2-16}{3} = \frac{9}{3} =$$

நிரூபிக்க தளமானது கோளத்தை தொடுகின்றது.

தொடுதளச் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+zz_1-2(x+x_1)+(1)(y+y_1)+(1)(z+z_1)-3=0$$

$$(x_1-2)x+(y_1+1)y+(z_1+1)z-2x_1+y_1+z_1-3=0$$

$$\frac{x_1-2}{2} = \frac{y_1+1}{-1} = \frac{z_1+1}{-2} = \frac{2x_1-y_1-z_1+3}{16}$$

$$\frac{x_1-2}{2} = \frac{y_1+1}{-1} = \frac{z+1}{-2} = r$$

எடுத்துக்காட்டு 4: (1,-2,3) என்ற புள்ளியையும் $z=0,\ x^2+y^2+z^2-9=0$ என்ற வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு: வட்டத்தின் வழியாக செல்லும் கோளம்.

$$x^2+y^2+z^2-9+\lambda z=0 \quad (1)$$

(1,-2,3) புள்ளி சமன் (1)-ன் வழியாக செல்கிறது

$$(1+4+9-9)+\lambda(3)=0$$

$$\lambda=-5/3$$

λ-ன் மதிப்பை (1)ல் பிரதியிட

$$(x^2+y^2+z^2-9)-\frac{5}{3}z=0$$

$$3(x^2+y^2+z^2)-5z-27=0.$$

எடுத்துக்காட்டு 8: $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற கோளத்தின் புள்ளி (x_1,y_1,z_1) என்ற தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு: P என்பது (x_1,y_1,z_1) ன் புள்ளி ஆகும். இது கோளத்தின் உள்ளது.

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d=0 \quad (1)$$

(x_1,y_1,z_1) என்ற புள்ளி வழியாக செல்லும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

C-ன் ஆய அச்சுத் தூரங்கள் $(-u,-v,-w)$

OP-ன் திசை விகிதங்கள் முறையே

$$u+x_1,\ v+y_1,\ w+z_1$$

தளத்தின் சமன்பாடு என்பது

$$(x-x_1)(u+x_1)+(y-y_1)(v+y_1)+(z-z_1)(w+z_1)=0$$

$$xx_1+yy_1+zz_1+ux+vy+wz=x_1^2+y_1^2+z_1^2+ux_1+vy_1+wz_1$$

Scanned by TapScanner

$x_1 = 2r+2, \quad y_1 = -r-1 \quad z_1 = -2r-1$

$2(2r+2) - (-r-1) - 2(-2r-1) - 16 = 0$

$4r + 4 + r + 1 + 4r + 2 - 16 = 0$

$9r - 9 = 0$

$r = 1$

தொடு புள்ளி $(4, -2, -3)$

எ.கா: 2. $x^2+y^2+z^2-6x+2z+1=0$ என்ற கோளத்தின் புள்ளி $(2,-2,1)$ ஆனது ஆதி வழியாக செல்லும் உள்ள கோளத்தின் சமன்பாடு காண்.

தீர்வு: கோளத்தின் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$2x - 2y + z - 3(x+2) + (z+1) + 1 = 0$

$x + 2y - 2z + 4 = 0.$

கோளத்தின் சமன்பாடு,

$x^2+y^2+z^2-6x+2z+1 + k(x+2y-2z+4) = 0$

இது ஆதி வழியாக செல்வதால் $k = -44$

$\therefore$ கோளத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2-6x+2z+1 - 44(x+2y-2z+4) = 0$

$4(x^2+y^2+z^2) - 25x - 2y + 10z = 0.$

Scanned by TapScanner

18K1M02

முப்பரிமாண பகுமுறை வடிவியல் மற்றும் தொகை நுண்கணிதம்

அலகு - 3

தொகையீட்டு பண்புகள்:

1. நிறுவுக $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2}+(\cos x)^{3/2}}\, dx = \pi/4$

தீர்வு: I என்பது கொடுத்த தொகையீட்டின் மதிப்பாகும் மற்றும்

$$f(x) = \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2}+(\cos x)^{3/2}}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx \longrightarrow (1)$$

$$f(a-x) = \frac{[\sin(\pi/2 - x)]^{3/2}}{(\sin \pi/2 - x)^{3/2} + [\cos(\pi/2 - x)]^{3/2}}$$

$$= \frac{(\cos x)^{3/2}}{(\cos x)^{3/2}+(\sin x)^{3/2}} \quad \text{as } a = \pi/2$$

$$I = \int_0^{\pi/2} f(a-x)\, dx \longrightarrow (2)$$

adding சமன்பாடு (1) மற்றும் (2)-ஐ கூட்டினால்

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2}+(\cos x)^{3/2}}\, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{3/2}}{(\cos x)^{3/2}+(\sin x)^{3/2}}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}+(\cos x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2}+(\cos x)^{3/2}}\, dx.$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} dx = (x)_0^{\pi/2} = \pi/2$$

$$I = \pi/4$$

Scanned by TapScanner

2. மதிப்பிடுக: $\int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx$.

தீர்வு: $f(x) = \log \tan x$

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx \longrightarrow (1) \qquad \text{இங்கு } a = \pi/2$$

$$f(a-x) = f(\pi/2 - x) = \log \tan(\pi/2 - x)$$
$$= \log \cot x$$

$$I = \int_0^{\pi/2} f(a-x)\, dx \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) -ஐக் கூட்ட, கிடைப்பது

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx + \int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \log(\tan x \cdot \cot x)\, dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \log(\tan x \times 1/\tan x)\, dx.$$
$$2I = \int_0^{\pi/2} \log(1)\, dx = 0$$
$$I = 0$$

3. நிறுவுக $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$

தீர்வு: $f(\theta) = \log(1+\tan\theta) \qquad a = \pi/4$

$$I = \int_0^{\pi/4} f(\theta)\, d\theta$$

$$f(a-\theta) = f(\pi/4 - \theta) = \log[1+\tan(\pi/4 - \theta)] = \log\left(1 + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$$
$$= \log\left(1 + \frac{\tan\pi/4 - \tan\theta}{1 - \tan\pi/4 \tan\theta}\right)$$
$$= \log\left(\frac{1 \cancel{+} \tan\theta}{1+\tan\theta}\right) = \log\left(\frac{1+\tan\theta + 1 - \tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$$
$$= \log\frac{2}{1+\tan\theta}$$

Scanned by TapScanner

$$I = \int_0^{\pi/4} f(a-\theta)\, d\theta \longrightarrow ②$$

சமன்பாடு ① மற்றும் ②-ஐ கூட்ட கிடைப்பது

$$2I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)\, d\theta + \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\cancel{1+\tan\theta} \cdot \frac{2}{\cancel{1+\tan\theta}}\right) d\theta$$

$$2I = \int_0^{\pi/4} \log 2 \; d\theta = \log 2\, (\theta)_0^{\pi/4} = \pi/4 \log 2$$

$$I = \pi/8 \log 2.$$

<u>பகுதிகளாக</u> <u>ஒருங்கிணைத்தல்</u>

<u>சூத்திரம்</u>: $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$

1. மதிப்பிடுக $\int x e^x dx.$

இங்கு $u = x \qquad \int dv = \int e^x dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

சூத்திரம் $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int x e^x dx = xe^x - \int e^x dx.$$

$$= xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

2. மதிப்பிடுக: $\int x \sin 2x\, dx$

இங்கு $u = x \qquad \int dv = \int \sin 2x\, dx$

$du = dx \qquad v = -\dfrac{\cos 2x}{2}$

$$\int x \sin 2x\, dx = \frac{-x\cos 2x}{2} - \int -\frac{\cos 2x}{2}\, dx$$

$$= -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$

Scanned by TapScanner

3. കണ്ടെത്തുക: $\int \tan^{-1}x \, dx$

ഉത്തരം $u = \tan^{-1}x \qquad \int dv = \int dx$

$du = \frac{1}{1+x^2} dx \qquad v = x$

$\int \tan^{-1}x \, dx = x\tan^{-1}x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx$

$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$

$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

4. കണ്ടെത്തുക $\int (\log x)^2 dx$

$u = (\log x)^2 \qquad \int dv = \int dx$

$v = x$

$du = 2\log x \, \frac{1}{x} dx$

$u = \log x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$\int dv = \int dx$

$v = x$

$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x(\log x)^2 - 2\int \log x \, dx$

$= x(\log x)^2 - 2\left[x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx\right]$

$= x(\log x)^2 - 2\left[x\log x - x\right]$

$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x$

5. $\int \frac{x + \sin x}{1+\cos x} dx.$

ഉത്തരം: $I = \int \frac{x \, dx}{1+\cos x} + \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

$= \int \frac{x \, dx}{2\cos^2 x/2} + \int \frac{2\sin x/2 \cos x/2}{2\cos^2 x/2} dx.$

$= \int x \sec^2 x/2 + \int \tan x/2 \, dx$

$u = x \qquad \int dv = \int \sec^2 x/2$

$du = dx \qquad v = \tan x/2$

$= x\tan x/2 - \int \tan x/2 \, dx + \int \tan x/2 \, dx$

$= x\tan x/2$

Scanned by TapScanner

மதிப்புகாண்க

6. $\int e^x \frac{x+1}{(x+2)^2}\, dx = \int e^x \frac{(x+2-1)}{(x+2)^2}\, dx$

$$= \int \frac{e^x (x+2)}{(x+2)^2}\, dx - \int \frac{e^x}{(x+2)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{e^x}{x+2}\, dx - \frac{e^x}{(x+2)^2}\, dx$$

$u = 1/_{x+2}$ $\int dv = \int e^x\, dx$

$du = -1/_{(x+2)^2}\, dx$ $v = e^x$

$$= \int \frac{1}{x+2}\, d(e^x) - \int \frac{e^x}{(x+2)^2}\, dx.$$

$$= \frac{e^x}{x+2} + \int \frac{e^x}{(x+2)^2}\, dx - \int \frac{e^x}{(x+2)^2}\, dx$$

$$= \frac{e^x}{x+2}$$

மதிப்பிடுக.

7. $\int e^x (\sin x + \cos x)\, dx$

$u = \sin x$ $\int dv = \int e^x\, dx$

$du = \cos x\, dx$ $v = e^x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= e^x \sin x.$$

குறைப்புச் சூத்திரங்கள்

1. $I_n = \int x^n e^{ax}\, dx$ 'n' என்பது மிகை முழு எண்.

$u = x^n$ $\int dv = \int e^{ax}\, dx$

$du = n x^{n-1}\, dx$ $v = \frac{e^{ax}}{a}$

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\, n x^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} x^n - \frac{n}{a}\int e^{ax} x^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} I_n - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

2. $I_n = \int x^n \cos ax \, dx$ இனைக்கும் குறைப்புச் சூத்திரத்தைக் காண்க. இங்கு 'n' என்பது நேர் முழு எண் ஆகும்.

தீர்வு: $u = x^n \qquad \int dv = \int \cos ax \, dx$

$du = n x^{n-1} dx \qquad v = \frac{\sin ax}{a}$

$$= \frac{x^n \sin ax}{a} - \int \frac{\sin ax}{a} n x^{n-1} dx$$

$u = x^{n-1}$

$du = (n-1) x^{n-2} dx$

$$= \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} \sin ax \, dx$$

$\int dv = \int \sin ax \, dx$

$v = \frac{\cos ax}{a}$

$$= \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a}\left[x^{n-1}\frac{\cos ax}{a} - \int \frac{\cos ax}{a}(n-1) x^{n-2} dx\right]$$

$$= \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a^2} x^{n-1}\cos ax + \frac{n(n-1)}{a^2}\int x^{n-2}\cos ax \, dx$$

$$= \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a^2} x^{n-1}\cos ax + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}$$

3. $\int x^3 e^x dx$ -ன் தொகையீட்டுச் சூத்திரத்தை காண்க.

தீர்வு: $u = x^3 \qquad \int dv = \int e^x dx$

$du = 3x^2 dx \qquad v = e^x$

$u = x^2$

$du = 2x\, dx$

$$= x^3 e^x - \int e^x 3x^2 dx$$

$$= x^3 e^x - 3\left[x^2 e^x - \int e^x 2x \cos x \, dx\right]$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int e^x x \, dx$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left[x e^x - \int e^x dx\right]$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$$

$I_n = \int \sin^n x\, dx$ n என்பது நேர்மறை முழுஎண்ணாக இருந்தால்.

$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x\, dx$ $\qquad u = \sin^{n-1} x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$

$= \int \sin^{n-1} x\, d(-\cos x)$ $\qquad \int dv = \int \sin x\, dx$

$= -\sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x\,(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx$ $\qquad v = -\cos x.$

$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$

$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\, dx$

$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$

$(n-1) I_n + I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$

$n I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$

தேற்றங்கள்

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}, \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$ n என்பது இரட்டை

$\qquad = \frac{n-1}{n}, \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}$ n என்பது ஒற்றை

2. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}$

4. $\int \sin^5 x\, dx$ $\qquad y = \cos x$ போடுக

$\qquad\qquad\qquad\qquad dy = -\sin x\, dx$

$= \int \sin^4 x \sin x\, dx$

$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx.$

$= \int -(1-y^2)^2\, dy = -\int (1+y^4-2y^2)\, dy$

$= -y + \frac{2y^3}{} - \frac{y^5}{}$

5. $\int_0^{\pi/2} x(1-x^2)^{1/2}\,dx$.

தீர்வு $x = \sin\theta$ எனில் $x=0$ -ஆக இருக்கும் போது $\theta = 0$

$dx = \cos\theta\, d\theta$ $x = 1$ -ஆக " $\theta = \pi/2$

$\int_0^{\pi/2} x(1-x^2)^{1/2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,(1-\sin^2\theta)^{1/2}\cos\theta\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d(-\cos\theta)$

$= \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)_0^{\pi/2} = 1/3$

6. $I_n = \int \cos^n x\,dx$. (n என்பது நேர்மறை மிகை முழு எண்)

$u = \cos^{n-1} x$

$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x)\,dx$

$dv = \cos x\,dx$

$v = \sin x$

$I_n = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx$

$= \int \cos^{n-1} x\, d(\sin x)$

$= \cos^{n-1} x \sin x - \int \sin x \cos^{n-2} x\,(n-1)(-\sin x)\,dx$

$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx$

$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx$

$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$

$I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$

$(n-1) I_n + I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$

$n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}$

சூத்திரங்கள்:

1. $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ n என்பது இரட்டை எண்

$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}$ n என்பது ஒற்றை எண்.

2. $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256}$

3. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

4. $\int \cos^7 x\,dx = \int \cos^6 x \cos x\,dx$ put $y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx$

$(1-\sin^2 x)^3 \cos x\,dx$

$= \int (1-y^2)^3 \, dy$

$= \int (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) \, dy$

$= y - \frac{3y^3}{3} + \frac{3y^5}{5} - \frac{y^7}{7}$

$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}$

m, n എന്നിവ ഇരട്ട സംഖ്യകൾ ആയാൽ $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$.

$(m+n) I_{m,n} = -\cos^{n+1} \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2,n}$

1. $\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$; $y = \sin x$ - ആയി എടുക്കുക

$dy = \cos x \, dx$

$= \int y^6 (1-y^2) \, dy$

$= \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{9} = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9}$

2. $\int \sin^9 x \cos^5 x \, dx$

$y = \sin x$ - ആയി എടുക്കുക

$dy = \cos x \, dx$

$\int \sin^9 x \cos^5 x \, dx = \int y^9 (1-y^2)^2 \, dy$

$= \int y^9 (1 + y^4 - 2y^2) \, dy$

$= \frac{y^{10}}{10} + \frac{y^{14}}{14} - \frac{2y^{12}}{12}$

$= \frac{\sin^{10} x}{10} + \frac{\sin^{14} x}{14} - \frac{\sin^{12} x}{6}$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^5 x \, dx = \frac{4}{11} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{7} = \frac{8}{693}$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x \, dx = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$= \frac{3\pi}{512}$

Scanned by TapScanner

$I_n = \int \tan^n x \, dx$ n என்பது முழு எண் எனில்

$= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx$

$= \int \tan^{n-2} x \,(\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x - \int \tan^{n-2} x \, dx$

$= \int \tan^{n-2} x \, d(\tan x) - \int \tan^{n-2} x \, dx$

$= \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$

உதாரணம்.

சூத்திரத்தில்

$\int \tan^4 x \, dx = \dfrac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 x \, dx$ n = 4 என போடுக

$= \dfrac{\tan^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \dfrac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x$

மதிப்பு காண்க.

2. $\int_0^{\pi/2} \tan^3 x \, dx = \left[\dfrac{\tan^2 x}{2}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$ n = 3 என போடுக

$= 1/2 + (\log \cos x)_0^{\pi/4}$

$= 1/2 + \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1 + \log \sqrt{2})$

$I_n = \int \sec^n x \, dx$

$\int \sec^n x \, dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x \, dx$

$= \int \sec^{n-2} x \, d(\tan x)$

$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x \, dx$

$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x \, dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx$

$I_n = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$

$x \quad 1^{x+y} \quad x+y+z \quad$ 1. $dy\,dx$

$$(n-1) I_n = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$$

1. $\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \, d(\tan x)$

$$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

$$I = \sec x \tan x - I + \log(\sec x + \tan x)$$

$$2I = \sec x \tan x + \log(\sec x + \tan x)$$

2. $\int \sec^6 x \, dx = \int \sec^4 x \, d(\tan x)$

$$= \int (1+t^2)^2 \, dt \quad t = \tan x \text{ [illegible]}$$

$$= \int (1 + 2t^2 + t^4) \, dt$$

$$= t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$$

$$= \tan x + \frac{2\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5}$$

[illegible]. $\int x^m (\log x)^m \, dx$

$$\int x^m (\log x)^n \, dx = \int (\log x)^n \, d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$= (\log x)^n \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\log x)^{n-1} \, dx$$

$$= (\log x)^n \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$$

4. $\int x^4 (\log x)^3 dx = \int (\log x)^3 \, d\left(\frac{x^5}{5}\right)$

$$= \frac{x^5}{5}(\log x)^3 - \frac{3}{5}\int (\log x^2)\, x^4 dx$$

$$= \frac{x^5}{5}(\log x)^3 - \frac{3}{5}\int (\log x)^2 \, d\left(\frac{x^5}{5}\right)$$

$$= \frac{x^5}{5}(\log x)^3 - \frac{3}{25}x^5(\log x)^2 + \frac{6}{25}\int x^4 (\log x)\, dx$$

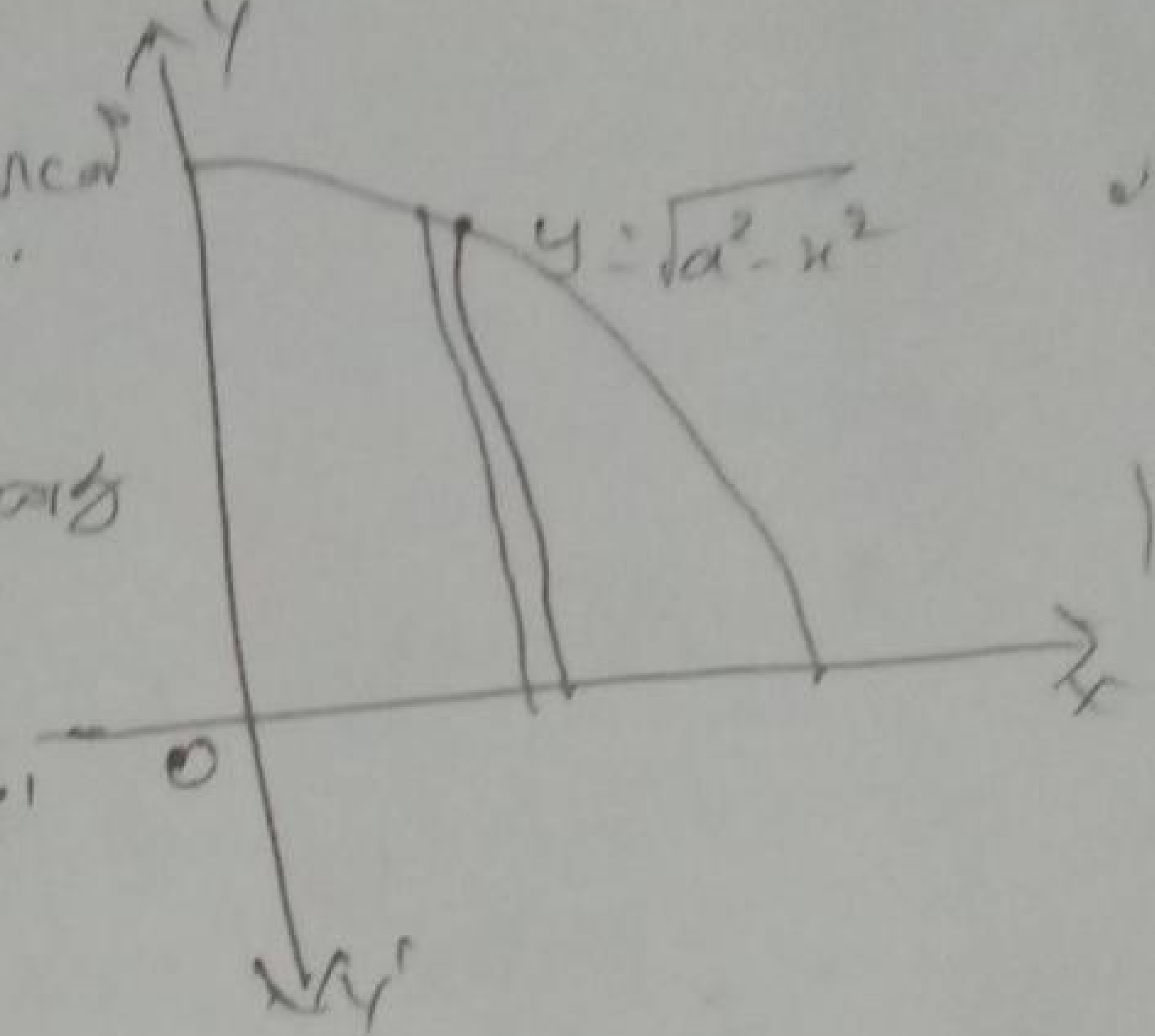
$$= \frac{x^5}{5}(\log x)^3 - \frac{3}{25}x^5(\log x)^2 + \frac{6}{25}\left[\frac{x^5}{5}\log x - \frac{x^5}{25}\right]$$

$$= \frac{x^5}{5}\left[(\log x)^3 - \frac{3}{5}(\log x)^2 + \frac{6}{25}\log x - \frac{6}{125}\right]$$

அலகு - IV இரட்டை தொகையீட்டின் மதிப்புகள்

1. கொடுக்கப்பட்ட R என்பது மேல் வரம்புள்ள $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தின் முதல் கால்பகுதியின் $\iint_R xy\,dx\,dy$ -ஐ மதிப்பிடுக

தீர்வு முதலில் x-ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு y ஆனது 0 இலிருந்து $\sqrt{a^2-x^2}$ வரை தொகையிட வேண்டும்.



முழுப்பகுதியை எடுத்துக் கொண்டு x ஆனது 0 விலிருந்து a வரை தொகையிட வேண்டும்

$$\iint xy\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dx\,dy$$

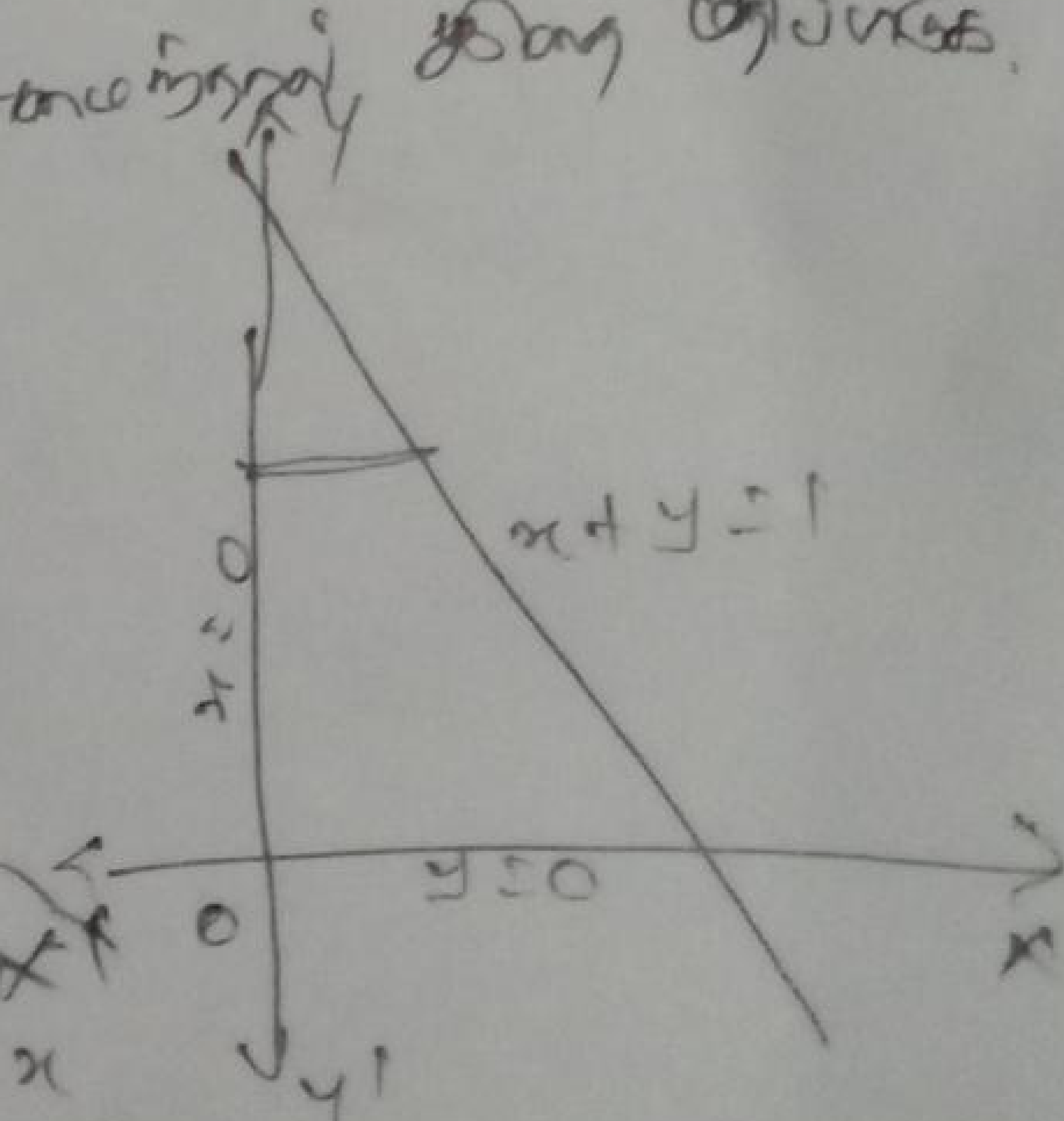
$$= \int_0^a \left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a \frac{x(a^2-x^2)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (a^2x-x^3)\,dx$$

$$= \frac{a^4}{8}$$

2. $\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$ கொடுக்கப்பட்ட $x+y\le 1$ கோட்டுடன் R என்பது வரம்புள்ள பரப்பளவின் முதல் கால்பகுதி அமைந்துள்ள தளத்தை மதிப்பிடுக.



தீர்வு இந்த மூன்று கோடுகளின் பரப்பானது முக்கோணம் ஆக உள்ளது.

$x=0$, $y=0$ $x+y=1$

$$\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{(1-x)^4}{4}(-1) \right]$$

$$= 1/3 - 1/4 + 1/12$$

$$= \frac{2}{12} = 1/6$$

3. மதிப்பிடுக, $\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)\, dx\, dy$

$$\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right)_1^2 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + 2y^2 \right) - \left(1/3 + y^2 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{7}{3} y + \frac{y^3}{3} \Big)_0^1$$

$$= 8/3$$

4. மதிப்பிடுக : $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} r\, dr\, d\theta$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2}{2} \right)_0^{\sin\theta}$$

$$= 1/2 \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 1/2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= 1/4 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)_0^{\pi}$$

$$= \pi/4$$

5. மதிப்பிடுக $\int_0^1 \int_0^x dy\, dx$

$$\int_0^1 \int_0^x dy\, dx = \int_0^1 (y)_0^x\, dx$$

$$= \int_0^1 x\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1$$

$$= 1/2$$

6. மதிப்பிடுக $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\sin(\theta + \varphi))\, d\theta\, d\varphi$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\sin(\theta+\varphi))\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} (-\cos(\theta+\varphi))_0^{\pi/2}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos(\pi/2 + \varphi) + \cos\varphi)\, d\varphi$$

$$= (-\sin(\pi/2 + \varphi) + \sin\varphi)_0^{\pi/2}$$

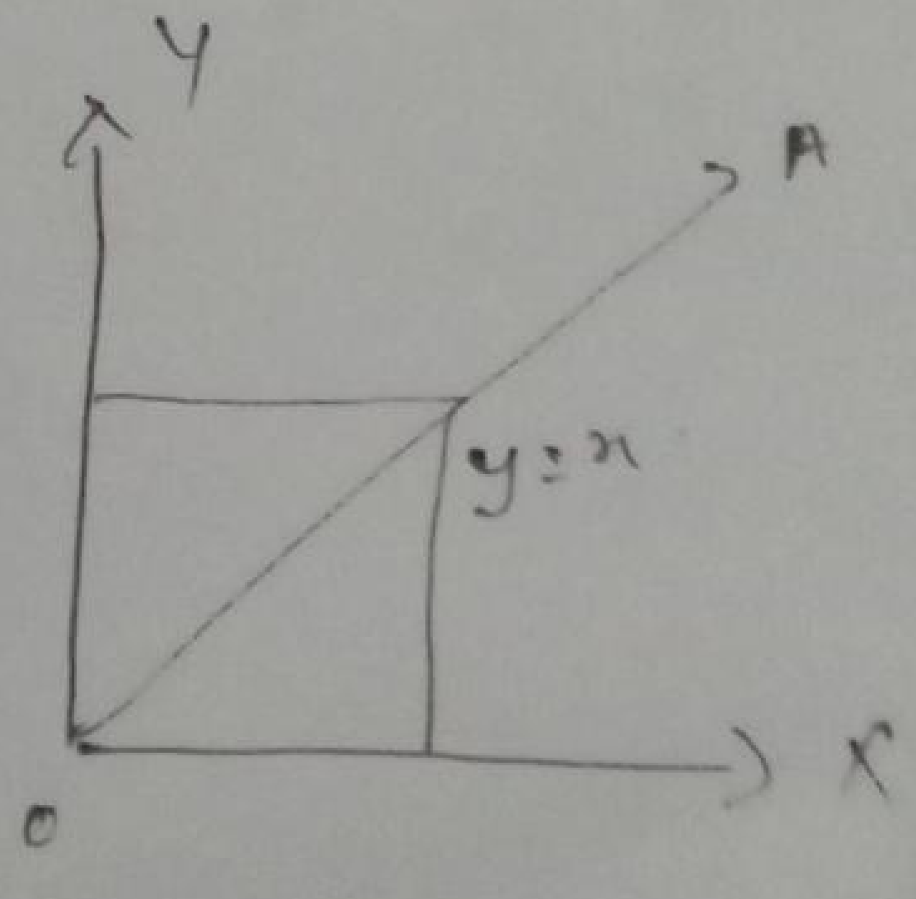
$$= (-\sin\pi + \sin\pi/2) - (-\sin\pi/2 + \sin 0)$$

$$= 1 - (-1)$$

$$= 2$$

7. இரட்டை தொகையிடலின் மாற்ற (வரிசை அமைவு)

இரட்டை தொகையிடலை பயன்படுத்தி $\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dx\, dy$ -ன் மதிப்பை காண்க.



__தீர்வு__. $I = \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy$

y-ன் தொகையிடலானது x-லிருந்து ∞ வரை மற்றும் x-ன் தொகையிடலானது 0 விலிருந்து ∞ வரை

மாற்றி, x ஆனது 0 விலிருந்து y வரை மாறுபடுகிறது. மேலும் y ஆனது 0 விலிருந்து ∞ வரை வேறுபடும் மாறுபடுகிறது.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \int_0^{y} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \, (x)_0^{y}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} \, dy$$

$$= (-e^{-y})_0^{\infty}$$

$$= 1$$

மூன்று தொகையீடுகள்

R என்ற பகுதியின் மூன்று தொகையீட்டின் குறியீடு

$\iiint_R f(x,y,z) \, dx\, dy\, dz$ அல்லது $\iiint_R f(x,y,z) \, dv$ என

குறிக்கப்படுகிறது.

மதிப்பிடுக $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2+y^2+z^2) \, dx\, dy\, dz$

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2+y^2+z^2) \, dx\, dy\, dz = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 + xz^2\right)_0^c dy\, dz$$

$$= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{c^3}{3} + cy^2 + cz^2\right) dy\, dz$$

$$= c\int_0^a \int_0^b \left(\frac{c^2}{3} + y^2 + z^2\right) dy\, dz$$

$$= c\int_0^a \left(\frac{c^2}{3}y + \frac{y^3}{3} + z^2 y\right)_0^b dz$$

$$= c\int_0^a \left(\frac{c^2}{3} b + \frac{b^3}{3} + z^2 b\right) dz$$

$$= bc\int_0^a \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} + z^2) dz$$

$$= bc\left[\frac{c^2}{3} z + \frac{b^2}{3} z + \frac{z^3}{3}\right)_0^a$$

$$= bc\left[\frac{c^2}{3} a + \frac{b^2}{3} a + \frac{a^3}{3}\right]$$

$$= abc\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3}\right)$$

$$= \frac{abc}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

2. மதிப்பிடுக

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}\, dz\, dy\, dx$$

$a = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{a^2-x^2-y^2})^2 - z^2}}\, dz\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}\, dz\right) dy\, dx.$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sin^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)_0^a\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0)\right] dy\, dx$$

$$= \pi/2 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\right) dx$$

$$= \pi/2 \int_0^a (y)_0^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(x/a) \right]_0^a$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1) - 0 \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{a^2\pi^2}{8}$$

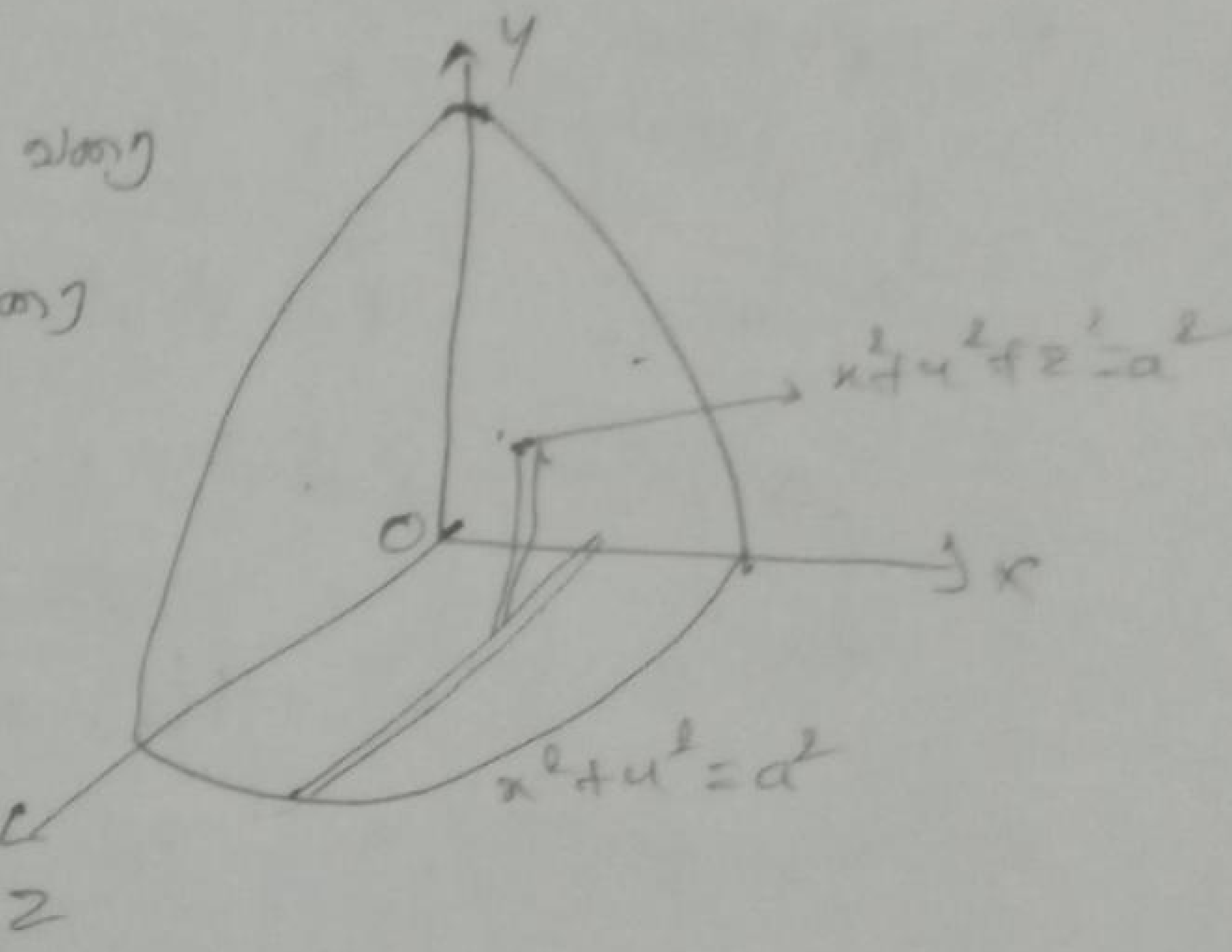
3. $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளத்தின் முதல் எண்ம பகுதியின் வழியாக எடுக்கப்பட்டால் $\iiint xyz\, dx\, dy\, dz$-ன் மதிப்பு காண்க.

<u>தீர்வு</u>: எல்லைகளின் மதிப்பு

$z = 0$ லிருந்து $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ வரை

$y = 0$ லிருந்து $\sqrt{a^2-x^2}$ வரை

$x = 0$ லிருந்து a வரை



$$\iiint xyz\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} xyz\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(xy\frac{z^2}{2} \right)_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\frac{(a^2-x^2-y^2)}{2}\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (xya^2 - x^3y - xy^3)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{xy^2a^2}{2} - \frac{x^3y^2}{2} - \frac{xy^4}{4} \right)_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x(a^2-x^2)a^2 - x^3(a^2-x^2)}{2} - \frac{x(a^2-x^2)^2}{4} \Big]$$

Scanned by TapScanner

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2x^2}{4} - \frac{x^3 a^2}{8} - \frac{x^2a^2}{8} + \frac{x^6}{12} - \frac{x^2a^4}{8} - \frac{x^6}{24} + \frac{a^4x^4}{8}\right]_0$$

$$= \frac{a^6}{48}$$

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு: கனஅளவு $V = 8\iiint dx\,dy\,dz$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{z^2}{c^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

$$z^2 = c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$z = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

z: 0 இலிருந்து $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ வரை

y: 0 இலிருந்து $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ வரை

x: 0 இலிருந்து a வரை

$$\text{கனஅளவு} = 8\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\,dy\,dx$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} (z)_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}\,dy\,dx.$$

$$= 8\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx$$

$$= 8c\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \frac{1}{b}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy\,dx$$

$$= \frac{8c}{b}\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2-y^2}\,dy\,dx$$

$$= \frac{8c}{b}\int_0^a \left(\int_0^a \left(\sqrt{a^2-y^2}\right)dy\right)dx \quad a = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$= \frac{8c}{b}\int_0^a \left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)\right]_0^a dx$$

$$= \frac{2\pi bc}{a} \int_0^a a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= 2\pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a$$

$$= 2\pi bc \left[a - \frac{a^3}{3a^2} \right]$$

$$= 2\pi bc \left(a - \frac{a}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc$$

5. Evaluate $\int_1^3 \int_{1/x}^1 \int_0^{\sqrt{xy}} xyz \, dz \, dy \, dx.$

Soln : $\int_1^3 \int_{1/x}^1 \int_0^{\sqrt{xy}} xyz \, dz \, dy \, dx = \int_1^3 \int_{1/x}^1 xy\left(\frac{z^2}{2}\right)_0^{\sqrt{xy}} dy \, dx$

$$= \int_1^3 \int_{1/x}^1 xy \left(\frac{xy}{2}\right) dy \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 \left(\frac{y^3}{3}\right)_{1/x}^1 dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^3 x^2 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} - \log x \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{6} \left(9 - \log 3 - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{26}{3} - \log 3 \right]$$

Scanned by TapScanner

அலகு - 5 பீட்டா மற்றும் காமா சார்புகள்

வரையறைகள்:

1. பீட்டா சார்புகள்

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \beta(m,n) \quad m>0,\ n>0$$

2. காமா சார்புகள்

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx,\quad n>0.$$

தொடர்புகள்:

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$m>0,\ n>0$ என்ற மெய்யெண் சார்பாக $\beta(m,n)$-ல் உள்ளது.

காமா சார்பின் மறுநிகழ்வுத் தொடர்பு

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \quad (n>-1)$$

பகுதித்தொகையிடல் படி $u = x^n$ என எடுத்துக் கொள்க.

$$dv = e^{-x}dx.$$

$$\Gamma(n+1) = \left[-e^{-x}x^n\right]_0^\infty - n\int_0^\infty -e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

$$\lim_{x\to 0} e^{-x}x^n = 0,\ n>0$$

$$\lim_{x\to 0} e^{-x}x^n = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\therefore \Gamma(n+1) = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

பீட்டா சார்புகளின் பண்புகள்

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

$= n(n-1)\Gamma(n-1)$

$= n(n-1)(n-2)\cdots 1\,\Gamma(1)$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x}\,dx$

$= \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty$

$\Gamma(1) = 1$

$\therefore \Gamma(n+1) = n!$

விளைவு: $\Gamma(n+a) = (n+a-1)(n+a-2)\cdots a\Gamma(a)$

2. $\beta(m,n) = \beta(n,m)$

$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$x = 1-y$ என பதிலிட

$\beta(m,n) = \int_0^1 (1-y)^{m-1}\, y^{n-1}\,(-dy)$

$= \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}\,dy$

$= \beta(n,m)$

3. $\beta(m,n)$ என்பது ஒரு திட்டவட்டமான தொகையீட்டினைப் போல $0, \infty$ -ஐ வரம்புகளாக வெளிப்படுத்தலாம்.

$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$x = \dfrac{y}{1+y}$ எனப்பதிலிட அல்லது $x=0,\ y=0$ எனில் $x=1,\ y=\infty$.

தொகையீடு $\beta(m,n) = \int_0^\infty \dfrac{y^{m-1}}{(1+y)^{m-1}} \cdot \dfrac{1}{(1+y)^{n-1}} \cdot \dfrac{dy}{(1+y)^2}$

Scanned by TapScanner

$$= \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy$$

4. $\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}x \cos^{2n-1}x\, dx$

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

$x = \sin^2\theta$ என பிரதியிட

$$\beta(m,n) = \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{m-1}(1-\sin^2\theta)^{n-1}\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$$

which can be written as $2\, I_{2m-1,\,2n-1}$

$$I_{m,n} = \tfrac{1}{2}\,\beta\left(\tfrac{m+1}{2}, \tfrac{n+1}{2}\right)$$

பீட்டா மற்றும் காமா சார்புகளுக்கிடையேயான தொடர்பு

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\, dx$$

$x = t^2$ என பிரதியிட

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty (t^2)^{m-1} e^{-t^2}\, 2t\, dt$$

$2\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2}\, dx$ என எழுதலாம்

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2}\, dy$$

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy$$

$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ என பிரதியிட்டு [illegible]

[illegible]

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^{\alpha}\int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\alpha}\int_0^{\pi/2} r^{2n+2m-1} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\alpha} e^{-r^2} r^{2n+2m-1}\, dr = 1/2 \int_0^{\alpha} t^{m+n-1} e^{-t}\, dt. \quad t = r^2$$

$$= 1/2\, \Gamma(m+n)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \Gamma_{2m-1}, \Gamma_{2n-1}$$

$$= 1/2\, \beta(m,n)$$

$$\therefore \Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \cdot 1/2\, \Gamma(m+n)\, 1/2\, \beta(m,n)$$

$$= \Gamma(m+n)\, \beta(m,n)$$

$$\therefore \beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad m = n = 1/2$$

$$\beta(1/2, 1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma 1}$$

$$\beta(1/2, 1/2) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^0\theta \cos^0\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \pi$$

$$\Gamma 1 = 1$$

$$[\Gamma 1/2]^2 = \pi$$

$$\Gamma 1/2 = \sqrt{\pi}$$

6. மதிப்பிடுக $\int_0^{\log a}\int_0^{x}\int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx$

தீர்வு: $\int_0^{\log a}\int_0^{x}\int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx = \int_0^{\log a}\int_0^{x}\left(e^{x+y+z}\right)_0^{x+y} dy\,dx$

$$= \int_0^{\log a}\int_0^{x}\left[e^{2(x+y)} - e^{x+y}\right]dy\,dx$$

$$= \int_0^{\log a}\left(\frac{e^{2(x+y)}}{2} - e^{x+y}\right]_0^{x}dx$$

$$= \int_0^{\log a}\left(\frac{e^{4x}}{2} - e^{2x}\right) - \left(\frac{e^{2x}}{2} - e^{x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{e^{4x}}{8} - \frac{3}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2} + e^{x}\right]_0^{\log a}$$

$$= \left(e^{4\log a} - \frac{3}{4}e^{2\log a} + e^{\log a}\right) - \left(+\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1\right)$$

$$= \left(e^{\log a^4} - \frac{3}{4}e^{\log a^2} + e^{\log a}\right) - \left(\frac{1-6+8}{8}\right)$$

$$= \frac{a^4}{8} - \frac{3}{4}a^2 + a - \frac{3}{8}$$

7. மதிப்பிடுக $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x+y} e^{z}\,dx\,dy\,dz$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}\left(e^{z}\right)_0^{x+y}dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}\left(e^{x+y} - 1\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left(e^{x+y} - y\right)_0^{1-x}dx$$

$$= \int_0^1 \left[e^{x+1-x} - (1-x)\right] - \left[e^x\right] dx$$

$$= \int_0^1 (e^1 - 1 + x - e^x)\,dx$$

$$= \left(e^1 x - x + \frac{x^2}{2} - e^x\right)_0^1$$

$$= e - 1 + 1/2 - e + 1$$

$$= 1/2$$

দেখাও ! $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta = \frac{1}{2} B(m,n)$ যেখানে ...

প্রমাণ : $2m = p$ and $2n = q$ ধরে পাই :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\theta \cos^{q-1}\theta \, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)} \quad \text{--- (1)}$$

$q = 1$ ধরে সমীকরণ 1-এ পাই,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\theta \, d\theta = \frac{\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \quad \text{--- (2)}$$

এবং আবার $p = q$ ধরে সমীকরণ (1)-এ পাই,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\theta \cos^{p-1}\theta \, d\theta = \frac{\frac{1}{2}\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(p)}$$

$$\frac{1}{2^{p-1}} \int_0^{\pi} \sin^{p-1} 2\theta \, d\theta = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right)^2}{2\,\Gamma(p)}$$

Scanned by TapScanner

$2\theta = \varphi$ বসিয়ে পাই

$$\frac{1}{2^{p-1}}\int_0^{\pi} \sin^{p-1}\varphi \, d\varphi = \frac{\{\Gamma(p/2)\}^2}{\Gamma(p)}$$

সমীকরণ (2)-এর সাথে তুলনা করে

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{p-1}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma(p)}$$

$$\Gamma(p/2)\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{p-1}}\,\Gamma(p) \longrightarrow (3)$$

$p = 2n$ বসিয়ে পাই

$$\Gamma(n)\,\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)}{2^{2n-1}}$$

$$n = 1/4;\quad \Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2)}{2^{-1/2}}$$

$$= \sqrt{2}\,\pi$$

1. দেখাও যে $\int_0^1 x^m (\log 1/x)^n \, dx$

put $(\log 1/x) = t \quad x = e^{-t}$

$$dx = -e^{-t}\,dt$$

$$\int_0^1 x^m (\log 1/x)^n dx = \int_0^{\infty} (e^{-t})^m t^n (-e^{-t})\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(m+1)t}\, t^n \, dt$$

$(m+1)t = y \quad dt = \frac{1}{m+1}\,dy$ বসিয়ে পাই

$$\int_0^{\infty} e^{-y}\, y^n\, \frac{1}{\ldots}\, dy = \frac{1}{\ldots^{m+1}}\,\Gamma(m+1)$$

$\int_0 e^{-x^2} dx \qquad x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. [illegible]

$$\int_0^1 x^7 (1-x)^8 dx = \beta(8,9)$$

$$= \frac{\Gamma(8)\,\Gamma(9)}{\Gamma(17)}$$

$$= \frac{7!\,8!}{16!}$$

4. $$\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta \cos^5\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\, \beta\left(\frac{7+1}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \beta(4,3)$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{\Gamma(4)\,\Gamma(3)}{\Gamma(7)}$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{3!\,2!}{6!}$$

$$= 1/120$$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^{10}\theta \, d\theta = \dfrac{\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{11}{2}\,\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\right)}$

$n = 9/2$

$n+1 = 11/2$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma 6}$$

$$= \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot\left(\sqrt{\pi}\right)^2}{5!\ 2^6}$$

$$= \frac{63\pi}{512}$$

6. [illegible] $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta \cos^{-1/2}\theta \, d\theta.$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\Gamma\frac{3}{4}\,\Gamma\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Scanned by TapScanner

7. $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ -ஐ காமா சார்பின் வாயிலாக மதிப்பிட்டு

$\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx$ -ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: $x^n = y$

$n x^{n-1} dx = dy$

$$\therefore \int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx = \int_0^1 y^{m/n} (1-y)^p \frac{dy}{n \cdot y^{n-1/n}}$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{m-n+1}{n}} (1-y)^p dy$$

$$= \frac{1}{n} \beta\left(\frac{m-n+1}{n}+1,\ p+1\right)$$

$$= \frac{1}{n} \beta\left(\frac{m+1}{n},\ p+1\right)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)}$$

$$\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{3}\right) \Gamma(10+1)}{\Gamma\left(\frac{5+1}{3}+10+1\right)}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2)\ \Gamma(11)}{\Gamma(13)}$$

$$= \frac{1}{396}$$

8. நிறுவுக. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{m+n}} = \frac{\beta(m,n)}{\dots m \dots n}$

தொகை: t [illegible]

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1}\,dt}{(a+bt^2)^{m+n}}$$

$\sqrt{b}\,t = \sqrt{ay}$ என பிரதியிட்டு [illegible]

$$\frac{1}{2a^m b^n} \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} = \frac{\beta(m,n)}{2a^m b^n}.$$