SEMESTER : II
CORE COURSE : III

Inst Hour	: 5
Credit	: 4
Code	: 18K2M03

THEORY OF EQUATIONS AND LINEAR ALGEBRA

UNIT 1:

Relations between the roots and coefficients of equations - Symmetric function of the roots –Sum of the powers of the roots – Newton's Theorem on the sum of the powers of the roots.
(Chapter 6: Sections 11-14 of Text Book 1)

UNIT 2:

Transformations of Equations – Reciprocal equations of all types - Diminishing, Increasing and multiplying the roots by a constant – Forming equations with the given roots – Removal of terms – Descarte's rule of Signs (Statement only) – simple problems.
(Chapter 6: Sections 15 to 20 & 24 of Text Book 1)

UNIT 3:

Definition and simple properties of a vector space – subspaces and quotient spaces- sums and direct sums- linear independence – basis and dimension.
(Chapter 6: sec 6.1- 6.5 of Text Book 2).

UNIT 4:

Homomorphism – dual spaces- algebra of linear transformations- Eigen value and Eigen vectors- algebra of matrices – triangular form- trace and transpose- rank of a matrix.
(Chapter 6: sec 6.6, 6.7, Chapter 7: Sections 7.1 - 7.6 of Text Book 2)

UNIT 5:

Matrices – Rank of a Matrix – Eigen Values, Eigen Vectors – Cayley's Hamilton Theorem - Verification of Cayley's Hamilton theorem.
(Chapter 2 :Sections 1-14,16-16.5 of Text Book 3)

Text Book(s)

[1] T.K. Manickavasagom Pillai ,T.Natarajan, K.S.Ganapathy , Algebra Volume I , S.V Publications - 2016

[2] M.L. Santiago, Modern Algebra, Tata McGraw Hill Publishing Company, New Delhi, 2002

[3] T.K.Manickavasagom Pillai & others, Algebra Volume II S.V. Publications -2015

Books for Reference

[1]Classical Algebra, A.Singaravelu, R.Ramaa.

[2]V.Krishnamoorthy, V.P.Mainra, J.L.Arora, An Introduction to Linear Algebra, Affiliated East – West Press.

[3] Frank Ayres ,Matrices - Schaum's Outline Series.

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

9.3.18

9/3/18

எடுத்துக்காட்டு: 2

தீர்க்க: $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = 0$. இச்சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $1 - \sqrt{5}$.

தீர்வு:

விதமுறு எண் மூலங்கள் ஜோடியாகவே வரும் என்பதால் $1 + \sqrt{5}$ -ம் மற்றொரு மூலமாகும்..

இம்மூலங்களை கொண்ட காரணிகள்

$$\left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$$

, i.e., $(x-1)^2 - 5$

i.e., $x^2 - 2x - 4$.

$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8$ ஐ $x^2 - 2x - 4$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் ஈவு $x^2 - 3x + 2$.

∴சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $1 \pm \sqrt{5}, 1, 2$.

பயிற்சி வினாக்கள்:

1. பின்வருவனவற்றை மூலமாக கொண்ட விகிதமுறு எண் கெழுக்களை உடைய சமன்பாட்டை அமைக்க.

(i) $4\sqrt{3}, 5 + 2\sqrt{-1}$ **(விடை: $\boldsymbol{x^4 - 10x^3 - 19x^2 + 480x - 1392 = 0}$)**

(ii) $-\sqrt{3} + \sqrt{-2}$ **(விடை:$\boldsymbol{x^4 - 2x^2 + 25 = 0}$)**

2.தீர்க்க: $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$ சமன்பாட்டின் ஒரு முலம் $1 + \sqrt{-1}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. **(விடை:$\boldsymbol{-2 \pm \sqrt{3}}$; $\boldsymbol{1 \pm \sqrt{-1}}$.)**

3. தீர்க்க: $3x^3 - 4x^2 + x + 88 = 0$. இதன் ஒரு மூலம் $2 - \sqrt{-7}$. **(விடை:$\boldsymbol{2 \pm \sqrt{-7}}$; $\boldsymbol{-\frac{8}{3}}$)**

4.தீர்க்க:$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 2 = 0$. இதன் ஒரு மூலம் $2 + \sqrt{3}$. **(விடை:$\boldsymbol{2 \pm \sqrt{3}}$; $\boldsymbol{1 \pm i}$)**

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மற்றும் கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு

எடுத்துக்காட்டு: 1 Show that the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are in Arithmetical progression if $2p^3 - 9pq + 27r - 0$. Show that the above condition is satisfied by the equation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Hence or otherwise solve the equation.

இங்கு $2p^3 - 9pq + 27r - 0$ எனில் $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எண் கணித தொடர் $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ என்ற சமன்பாடு மேற்கண்ட நிபந்தனையை நிறைவு செய்கிறது எனில் சமன்பாட்டை தீர்க்க.

தீர்வு: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் மூலங்கள் $\alpha - \delta, \alpha, \alpha + \delta$ என்க..

மூலங்கள் மற்றும் கெழுக்களுக்கு இடையேயான தொடர்பிலிருந்து

$$\alpha - \delta + \alpha + \alpha + \delta = -p$$

$$(\alpha - \delta)\alpha + (\alpha - \delta)(\alpha + \delta) + \alpha(\alpha + \delta) = q$$

$$(\alpha - \delta)\alpha(\alpha + \delta) = -r$$

$$3\alpha = -p \qquad \text{….. (1)}$$

$$3\alpha^2 - \delta^2 = q \qquad \text{….. (2)}$$

$$\alpha^3 - \alpha\delta^2 = -r. \qquad \text{….. (3)}$$

(1)லிருந்து, $\alpha = -\frac{p}{3}$

(2) லிருந்து, $\delta^2 = 3(-\frac{p}{3})^2 - q = \frac{p^2}{3} - q$

இந்த மதிப்புகளை (3)ல் மதிப்பிட, நாம் பெறுவது,

$$\left(-\frac{p}{3}\right)^3 - \left(-\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p^2}{3} - q\right) = -r$$

i.e., $2p^3 - 9pq + 27r = 0$

சமன்பாடு $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ ல்

p= -6, q =13, r = -10

$\therefore 2p^3 - 9pq + 27r = 2(-6)^3 - 9(-6)13 + 27(-10)$

= 0.

சமன்பாடு (1), (2), (3) லிருந்து

$$3\alpha = 6$$

$3\alpha^2 - \delta^2 = 13$

$\alpha^3 - \alpha\delta^2 = 10.$

$\therefore\ \alpha = 2, 12 - \delta^2 = 13.\ \therefore \delta^2 = -1$

i.e., $\delta = \pm i$

எனவே மூலங்கள் $2 - i, 2, 2 + i$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு: 2

Find the condition that the roots of the equation $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ may be in geometric progression. Solve the equation $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$ whose roots are in geometric progression.

$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் பெருக்கள் தொடராக இருக்கலாம் எனில் அதன் நிபந்தனையை காண்க. இதன் மூலங்கள் பெருக்கள் தொடர் எனில் $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை தீர்க்க.

தீர்வு:

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\frac{k}{r}$,k மற்றும் kr என்க.

$\therefore\ \frac{k}{r} + k^2 + k^2 r = -\frac{3b}{a}$ ... (1)

$\frac{k^2}{r} + k^2 + k^2 r = -\frac{3c}{a}$ ... (2)

$k^3 = -\frac{d}{a}$ ... (3)

(1)லிருந்து, $k\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = -\frac{3b}{a}$

(2) லிருந்து, $k^2\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{3c}{a}$

ஒன்றை மற்றொன்றால் வகுக்கக் கிடைப்பது $k = -\frac{c}{b}$

k-ன் மதிப்பை (3) ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது $(-\frac{c}{b})^3 = -\frac{d}{a}$.

$\therefore\ ac^3 = b^3 d.$

$27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$-ல்

$\frac{k}{r} + k^2 + k^2 r = -\frac{42}{27}$ … (1)

$\frac{k^2}{r} + k^2 + k^2 r = -\frac{28}{27}$ … (2)

$k^3 = \frac{8}{27}$ … (3)

$\therefore k = \frac{2}{3}$

இம்மதிப்பை (4)ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = -\frac{42}{27}$$

i.e., $3r^2 + 10r + 3 = 0$

(3r+1)(r+3)=0

r ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், மூலங்கள் $-2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு: 3

இதன் மூலங்கள் இசைத்தொடர் எனில் $\mathbf{81x^3 - 18x^2 - 36x + 8 = 0}$ என்ற சமன்பாட்டை தீர்க்க.

தீர்வு:

α, β, γ என்பன மூலங்கள் என்க.

$\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$

அதாவது $2\gamma\alpha = \beta\gamma + \alpha\beta$ …. (1)

மூலங்கள் மற்றும் கெழுக்களின் தொடர்புகளிலிருந்து நாம் பெறுவது

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{18}{81}$ … (2)

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{36}{81}$ … (3)

$\alpha\beta\gamma = -\frac{8}{81}$ … (4)

(1) மற்றும் (3)லிருந்து நாம் பெறுவது

$$2\gamma\alpha + \gamma\alpha = -\frac{36}{81}$$

அதாவது $3r\alpha = -\frac{36}{81}$

$$\therefore \gamma\alpha = -\frac{4}{27} \qquad \dots (5)$$

இம்மதிப்பை (4)ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$\beta\left(\frac{4}{27}\right) = -\frac{8}{81}$$

$\therefore\ \beta = \frac{2}{3}$.

(2) லிருந்து நாம் பெறுவது

$$\alpha + \gamma = \frac{18}{81} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9} \qquad \dots (6)$$

(5) மற்றும் (6)லிருந்து நாம் பெறுவது

$$\alpha = \frac{2}{9}\ and\ \gamma = -\frac{2}{3}$$

மூலங்கள் $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}$ மற்றும் $-\frac{2}{3}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு: 4

If the sum of two roots of the equation equals the sum of the other two, prove that $p^3 + 8r = 4pq$.

சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களின் கூடுதல் மற்ற இரண்டின் கூடுதலுக்கு சமம் எனில் $p^3 + 8r = 4pq$.என நிறுவுக.

தீர்வு:

α, β, γ மற்றும் δ என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \qquad \dots (1)$$

மூலங்கள் மற்றும் கெழுக்களின் தொடர்புகளிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -p \qquad \dots (2)$$

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = q$ … (3)

$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -r$ … (4)

$\alpha\beta\gamma\delta = s$ ….(5)

(1) மற்றும் (3)லிருந்து நாம் பெறுவது

$2(\alpha + \beta) = -p$ …(6)

(3)-ஐ மாற்றி எழுத

$\alpha\beta + \gamma\delta + (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = q$

அதாவது $(\alpha\beta + \gamma\delta) + (\alpha + \beta)^2 = q$ … (7)

(4) -ஐ மாற்றி எழுத

$\alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = -r$

அதாவது$(\alpha + \beta)(\alpha\beta + \gamma\delta) = -r$ … (8)

(6) மற்றும் (7)லிருந்து நாம் பெறுவது

$$\alpha\beta + \gamma\delta + \frac{p^2}{4} = q$$

$\therefore\ \alpha\beta + \gamma\delta = q - \frac{p^2}{4}$ …(9)

(8)லிருந்து நாம் பெறுவது

$$-\frac{p}{2}(\alpha\beta + \gamma\delta) = -r$$

அதாவது $\alpha\beta + \gamma\delta = \frac{2r}{p}$ …(10)

(9) மற்றும் (10) ஐ ஒப்பிட நாம் பெறுவது

$$q - \frac{p^2}{4} = \frac{2r}{p}$$

அதாவது, $4pq - p^3 = 8r$

அதாவது, $p^3 + 8r = 4pq$.

எடுத்துக்காட்டு: 5

$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை தீர்க்க: மேலும் இதன் மூலங்களுள் இரண்டு எண்ணளவில் சமமாகவும் எதிர்குறி மதிப்பிலும் உள்ளதாக கொடுக்கபட்டுள்ளது.

தீர்வு:

α, β, γ மற்றும் δ என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

இங்கு $\gamma = -\delta$.

அதாவது $\gamma + \delta = 0$. …(1)

மூலங்கள் மற்றும் கெழுக்களின் தொடர்புகளிலிருந்து நாம் பெறுவது

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2$ … (2)

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 4$ … (3)

$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -6$ … (4)

$\alpha\beta\gamma\delta = -21$ ….(5)

(1) மற்றும் (2)லிருந்து நாம் பெறுவது $\alpha + \beta = 2$ … (6)

(3)-ஐ மாற்றி எழுத

$$\alpha\beta + \gamma\delta + (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 4$$

$$\therefore\ \alpha\beta + \gamma\delta = 4 \qquad \ldots (7)$$

(4)-ஐ மாற்றி எழுத

$$\alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = -6$$

$$\therefore\ \gamma\delta(\alpha + \beta) = -6 \qquad \ldots (8)$$

(6) மற்றும் (8)லிருந்து நாம் பெறுவது $\gamma\delta = -3$ … (9)

ஆனால் $\gamma + \delta = 0\ \therefore\ r = \sqrt{3},\ \delta = -\sqrt{3}$.

(7) மற்றும் (9)லிருந்து நாம் பெறுவது $\alpha\beta = 7$

$\therefore\ \alpha$ மற்றும் β என்பன $x^2 - 2x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$\therefore\ \alpha = 1+\sqrt{-6},\ \beta = 1-\sqrt{-6}.$

பயிற்சி வினாக்கள்: தீர்க்க

1. Solve $x^3-12x^2+39x-28=0$ whose roots are in arithmetical progression. **(விடை: 1,4,7)**

2. Find the values of a and b for which the roots of the equation $4x^4-16x^3+ax^2+bx-7=0$ are in arithmetical progression.

(விடை: $\boldsymbol{a = 4\ or -\frac{4}{9}, b = 24\ or\ \frac{296}{9}}$

3. Solve the equation $6x^3-11x^2+6x-1=0$ whose roots are in harmonic progression. **(விடை:**$\boldsymbol{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}}$)

4. Solve the equation $6x^4-3x^3+8x^2-x+2=0$ being given that it has a pair of roots whose sum is zero. **(விடை:**$\pm\boldsymbol{\frac{i}{\sqrt{3}}}$, $\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{-15}}{4}}$)

5. Two roots of the equation $x^4-6x^3+18x^2-30x+25=0$ are of the form $\alpha+i\beta$ and $\beta+i\alpha$. Find all the roots of the equation. **(விடை:**$\boldsymbol{1\pm 2i}$, $\boldsymbol{2\pm i}$).

எடுத்துக்காட்டு: 1

α,β,γ என்பன $x^3+px^2+qx+r=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் $\sum\alpha^2$ன் மதிப்பை கெழுக்களின் வாயிலாக கணக்கிடுக.

தீர்வு:

$\alpha+\beta+\gamma=-p$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$

$\alpha\beta\gamma=-r$

$$\sum\alpha^2\beta=\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta$$

$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha\beta\gamma$$

$$=q(-p)-3(-r)$$

$$=3r-pq$$

எடுத்துக்காட்டு: 2

α, β, γ மற்றும் δ என்பன $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்ற இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்

(i)$\sum \alpha^2$ (ii) $\sum \alpha^2 \beta\gamma$ (iii) $\sum \alpha^2 \beta^2$ (iv) $\sum \alpha^4$

தீர்வு:

மூலங்கள் மற்றும் கெழுக்களின் தொடர்புகளிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -p$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = q$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -r$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = s$$

$$\sum \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$$

$$= (\sum \alpha)^2 - 2\sum \alpha\beta$$

$$= p^2 - 2q$$

$$\sum \alpha^2 \beta\gamma = (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 4\alpha\beta\gamma\delta$$

$$= (\sum \alpha\,\beta\gamma)(\sum \alpha) - 4\alpha\beta\gamma\delta$$

$$= pr - 4s$$

$$\sum \alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2$$

$$= (\sum \alpha\beta)^2 - 2\sum \alpha^2\beta\gamma - 6\alpha\beta\gamma\delta$$

$$= q^2 - 2(pr - 4s) - 6s$$

$$= q^2 - 2pr + 2s$$

$$\sum \alpha^4 = (\sum \alpha^2)^2 - 2\sum \alpha^2 \beta^2$$

$$= (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr + 2s)$$

$$= p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr - 4s$$

எடுத்துக்காட்டு: 3

α, β, γ என்பன $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta$ இவற்றை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க.

தீர்வு:

மூலங்கள் மற்றும் கெழுக்களின் தொடர்புகளிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\alpha + \beta + \gamma = -a$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$$

$$\alpha\beta\gamma = -c$$

தேவையான சமன்பாடு,

$$(x - \alpha\beta)(x - \beta\gamma)(x - \gamma\alpha) = 0$$

அதாவது, $x^3 - x^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2)x - \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0$

அதாவது, $x^3 - x^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + x\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha\beta\gamma)^2 = 0$

அதாவது, $x^3 - bx^2 + acx - c^2 = 0$

எடுத்துக்காட்டு: 4

α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\beta + \gamma - 2\alpha, \gamma + \alpha - 2\beta, \alpha + \beta - 2\gamma$ இவற்றை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க.

தீர்வு:

மூலங்கள் மற்றும் கெழுக்களின் தொடர்புகளிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\alpha + \beta + \gamma = -p$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$$

$$\alpha\beta\gamma = -r$$

தேவையான சமன்பாடு,

S_1=மூலங்களின் கூடுதல் $= \beta + \gamma - 2\alpha + \gamma + \alpha - 2\beta + \alpha + \beta - 2\gamma$

$= 0$

S_2= Sum of the products of the roots taken two at a time

இரண்டிரண்டாக மூலங்களின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதல்

$= (\beta + \gamma - 2\alpha)(\gamma + \alpha - 2\beta) + (\beta + \gamma - 2\alpha)(\alpha + \beta - 2\gamma) + (\alpha + \beta - 2\gamma)(\gamma + \alpha - 2\beta)$

$= (\alpha + \beta + \gamma - 3\alpha)(\alpha + \beta + \gamma - 3\beta) + 2$

$= (-p - 3\alpha)(-p - 3\beta) + (-p - 3\alpha)(-p - 3\gamma) + (-p - 3\gamma)(-p - 3\beta)$

$= (p + 3\alpha)(p + 3\beta) + (p + 3\alpha)(p + 3\gamma) + (p + 3\gamma)(p + 3\beta)$

$= 3p^2 + 6p(\alpha + \beta + \gamma) + 9(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 3p^2 + 6p(-p) + 9q$

$= 9q - 3p^2$

$S_3 =$ மூலங்களின் பெருக்கல்

$= (\beta + \gamma - 2\alpha)(\gamma + \alpha - 2\beta)(\alpha + \beta - 2\gamma)$

$= (\alpha + \beta + \gamma - 3\alpha)(\alpha + \beta + \gamma - 3\beta)(\alpha + \beta + \gamma - 3\gamma)$

$= (-p - 3\alpha)(-p - 3\beta)(-p - 3\gamma)$

$= -\{\mathrm{p}^3 + 3p^2(\alpha + \beta + \gamma) + 9p(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 27\alpha\beta\gamma\}$

$= -\{\mathrm{p}^3 + 3p^2(-\mathrm{p}) + 9pq - 27r\}$

$= 2p^3 - 9pq + 27r$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

அதாவது,

$$x^3 + (9q - 3p^2)x - (2p^3 - 9pq + 27r) = 0$$

பயிற்சி வினாக்கள்:

1. α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ **(விடை:**$\boldsymbol{3pq - p^3 - 3r}$**)**

(ii) $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma} + \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\alpha\gamma} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ **(விடை:**$\boldsymbol{\frac{pq}{r} - 3.}$**)**

2. α, β, γ என்பன $x^3 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)$ **(விடை:)** $\boldsymbol{-r.}$

(ii) $\frac{1}{\beta+\gamma} + \frac{1}{\gamma+\alpha} + \frac{1}{\alpha+\beta}$ **(விடை:)** $\boldsymbol{\frac{q}{r}.}$

எடுத்துக்காட்டு: 1 $x^5 = x^2 + x + 1$. **சமன்பாட்டின் மூலங்களின் முப்படியின் கூடுதலை காண்க.** Find the sum of the cubes of the roots of the equation $x^5 = x^2 + x + 1$.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = x^5 - x^2 - x - 1.$$

$S_3 = \frac{1}{x^3}$ **ன் பெழுக்கள்** $\frac{x(5x^4-2x-1)}{x^5-x^2-x-1}$

$= \frac{1}{x^3}$ **ன் பெழுக்கள்** $\frac{5-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}}$

$= \text{"} \quad \text{"} \quad \left(5 - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)\left(1 - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)^{-1}$

$= \text{"} \quad \text{"} \quad \left(5 - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)\left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) + \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)^2 + \ldots.\}$

$= \text{"} \quad \text{"} \quad \left(5 - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)(1 + \frac{1}{x^3} + \cdots) \quad = 3.$

எடுத்துக்காட்டு: 1

$x^7 + 5x^4 \mp 1$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் ஏழாவது அடுக்கின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

நியூட்டன் தேற்றத்தின் படி

சமன்பாட்டை

$$x^7 + p_1x^6 + p_2x^5 + p_3x^4 + p_4x^3 + p_5x^2 + p_6x + p_7 = 0$$

எனுமாறு எடுத்துக் கொண்டால்,

நமக்கு கிடைப்பது

$$p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p_6 = 0;\ p_3 = 5, p_7 = 1.$$

$\therefore\ S_{11} + p_1S_{10} + p_2S_9 + p_3S_8 + p_4S_7 + p_5S_6 + p_6S_5 + p_7S_4 = 0$

அதாவது, $S_{11} + 5S_8 + S_4 = 0$ … (1)

மீண்டும், $S_8 + p_1S_7 + p_2S_6 + p_3S_5 + p_4S_4 + p_5S_3 + p_6S_2 + p_7S_1 = 0$

அதாவது, $S_8 + 5S_5 + S_1 = 0$ … (2)

முதல் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த, $S_5 + p_1S_4 + p_2S_3 + p_3S_2 + p_4S_1 + 5p_5 = 0$

அதாவது, $S_5 + 5S_2 = 0$ … (3)

மீண்டும் $S_4 + p_1S_3 + p_2S_2 + p_3S_1 + 4p_4 = 0$

அதாவது, $S_4 + 5S_1 = 0$ … (4)

மீண்டும் $S_2 + p_1S_1 + 2p_2 = 0$

அதாவது, $S_2 = 0$ … (5)

மேலும் $S_1 = 0$ … (6)

(4), (5) மற்றும் (6)லிருந்து நாம் பெறுவது $S_4 = 0$

(3) மற்றும் (5)லிருந்து நாம் பெறுவது $S_5 = 0$

(2)லிருந்து நாம் பெறுவது $S_5 = 0$

(2)லிருந்து நாம் பெறுவது $S_8 = 0$

S_4, S_8 -ன் மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது $S_{11} = 0$

எடுத்துக்காட்டு: 2

$a + b + c + d = 0$ எனில்

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} . \frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{3}$$

எனக் காட்டு.

தீர்வு:

$a + b + c + d = 0$ என்பதால் a, b, c, d என்பன $x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + +p_3x + p_4 = 0$ ன் மூலங்கள். மேலும் $p_1 = 0$

நியூட்டன் தேற்றத்தின் படி

$S_5 + p_1S_4 + p_2S_3 + p_3S_2 + p_4S_1 = 0$ …(1)

$S_4 + p_1S_3 + p_2S_2 + p_3S_1 + 4p_4 = 0$ …(2)

$S_3 + p_1S_2 + p_2S_1 + 3p_3 = 0$ …(3)

$S_2 + p_1S_1 + 2p_2 = 0$ …(4)

$S_1 + p_1 = 0$ …(5)

(5)லிருந்து நாம் பெறுவது $S_1 = 0$

(4)லிருந்து நாம் பெறுவது $S_2 = -2p_2$

(3)லிருந்து நாம் பெறுவது $S_3 = -3p_3$

(1)லிருந்து நாம் பெறுவது $S_5 - 3p_2p_3 - 2p_3p_2 = 0$

அதாவது $S_5 = 5p_2p_3$.

$$i.e., \quad \frac{S_5}{5} = \frac{S_2}{2} . \frac{S_3}{3}$$

எனவே

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} . \frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{3}.$$

i.e., $x^3 + \frac{m}{2^2}x^2 - \frac{m^2}{2^4}x + \frac{m^3}{2^3.3^2} = 0.$

m = 12, எனில் $\frac{m}{2}, \frac{m^2}{2^4}, \frac{m^3}{2^3.3^2}$ என்பன முழுக்களாகயிருக்கும்.

எனவே 12 ஆல் பெருக்க

$$x^3 + \frac{12}{2^2}x^2 - \frac{12^2}{2^4}x + \frac{12^3}{2^3.3^2} = 0$$

i.e., $x^3 + 3x^2 - 9x + 24 = 0.$

பயிற்சி வினாக்கள்:

1. Find the equation whose roots are the roots of $x^5 + 6x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 2x - 1 = 0$ with the signs changed.

(விடை: $\boldsymbol{x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 2x + 1 = 0}$)

2. Remove the fractional coefficients from the equation $2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{16} = 0.$

$2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{16} = 0.$என்ற சமன்பாட்டின் பின்ன வடிவ கெழுக்களை நீக்குக

(விடை: $\boldsymbol{x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0}$)

அலகு -2

Reciprocal Equation தலைகீழ் சமன்பாடு

எடுத்துக்காட்டு: 1

சமன்பாட்டின் மூலங்களை காண்க. $x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$

தீர்வு:

ஒற்றைப் படி தலைகீழ் சமன்பாடு

$x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 1.$ **காரணி** (x+1)

சமன்பாட்டை பின்வருமாறு எழுத

$$x^5 + x^4 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + x + 1 = 0$$

i.e., $x^4(x + 1) + 3x^3(x + 1) + 3x(x + 1) + 1(x + 1) = 0$

i.e., $(x+1)(x^4+3x^3+3x+1)=0$

$\therefore x+1=0 \; or \; x^4+3x^3+3x+1=0.$

x^2 ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$

$x+\frac{1}{x}=z$ என எடுத்துக் கொண்டால் $\therefore \; x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2.$

$\therefore \; z^2-2+3z=0$

$\therefore z=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}.$

$\therefore x+\frac{1}{x}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

i.e., $2x^2+\left(3+\sqrt{17}\right)x+2=0$

or $2x^2+\left(3-\sqrt{17}\right)x+2=0.$

இவற்றிலிருந்து x ன் மதிப்பை காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு: 2

தீர்க்க:

$6x^5-x^4-43x^3+43x^2+x-6=0.$

தீர்வு:

ஒற்றைப் படி தலைகீழ் சமன்பாடு

$x-1$ ஒரு காரணி

சமன்பாட்டை மாற்றி எழுத

$6x^5-6x^4+5x^4-5x^3-38x^3+38x^2+5x^2-5x+6x-6=0$

i.e., $6x^4(x-1)+5x^3(x-1)-38x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)=0$

i.e., $(x-1)(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6)=0$

$\therefore x=1 \; or \; 6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$

நாம் தீர்க்க வேண்டியது $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$

x^2 ஆல் வகுக்க $6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$

i.e., $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$

$x+\frac{1}{x}=z$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2.$

$6(z^2-2)+5z-38=0$

i.e., $6z^2+5z-50=0$

i.e., $(2z-5)(3z+10)=0.$

$\therefore z=\frac{5}{2}\ or\ -\frac{10}{3}$

i.e., $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\ or\ x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$

i.e., $2x^2-5x+2=0$

$or\ 3x^2+10x+3=0$

i.e., $(2x-1)(x-2)=0$

$or\ (3x+1)(x+3)=0$

i.e., $x=\frac{1}{2}\ or\ 2\ or-\frac{1}{3}\ or-3.$

∴ சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$1,\frac{1}{2},2,-\frac{1}{3}\ \&-3.$

எடுத்துக்காட்டு: 3

தீர்க்க:

$6x^6-35x^5+56x^4-56x^2+35x-6=0.$

தீர்வு:

$x^2 - 1$ **காரணி**

சமன்பாட்டைமாற்றி எழுத

$6(x^6 - 1) - 35x(x^4 - 1) + 56x^2(x^2 - 1) = 0$

i.e., $6(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) - 35x(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 56x^2(x^2 - 1) = 0$

i.e., $(x^2 - 1)(6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6) = 0$

i.e., $x = 1 \; or - 1 \; or \; 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0.$

x^2 ஆல் வகுக்க $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$

$x + \frac{1}{x} = z,$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2.$$

$\therefore 6(z^2 - 2) - 35z + 62 = 0$

i.e., $6z^2 - 35z + 50 = 0$

i.e., $(3z - 10)(2z - 5) = 0$

i.e., $z = \frac{10}{3} or \frac{5}{2}$

$\therefore x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} or \; x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

i.e., $3x^2 - 10x + 3 = 0$

$$or \; 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

i.e., $(x - 3)(3x - 1) = 0$

$$or \; (x - 2)(2x - 1) = 0$$

i.e., $x = 3 \; or \; \frac{1}{3} \; or \; 2 \; or \; \frac{1}{2}.$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $1, -1, 3, \frac{1}{3}, 2$ மற்றும் $\frac{1}{3}.$

பயிற்சி வினாக்கள்:

பின்வரும் சமன்பாடுகளை தீர்க்க.

1. $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ **(விடை: $\mathbf{3 \pm \sqrt{8}, 2 \pm \sqrt{3}}$)**

2. $4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 20x + 4 = 0$ **(விடை: $\mathbf{2, \frac{1}{2} 2, \frac{1}{2}}$)**

3. $60\,x^4 - 736x^3 + 1433x^2 - 736x + 60 = 0$ **(விடை:$\mathbf{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{10}, 10}$).**

4. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ **(விடை:$\mathbf{-1}$, $\mathbf{\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}}$)**

Form of the quotient and remainder when a polynomial is divided by a binomial.

எடுத்துக்காட்டு: 1

$3x^3 + 8x^2 + 8x + 12$ ஆனது $x - 4$ ஆல் வகுக்கப்பட்டால் ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.

தீர்வு:

4	3	8	8	12
		12	80	352
	3	20	88	364

ஈவு :$3x^2 + 20x + 88$ மீதி: 364

எடுத்துக்காட்டு: 2

$2x^6 + 3x^5 - 15x^2 + 2x - 4$ ஆனது 2 ஆல் வகுக்கப்பட்டால் ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.

தீர்வு:

-5	2	3	0	0	-15	2	-4
		-10	35	-175	875	-4300	21490
	2	-7	35	-175	860	-4298	21486

ஈவு :$2x^5 - 7x^4 + 35x^3 - 175x^2 + 860x - 4298$

மீதி: 21486.

எடுத்துக்காட்டு 3: 2ஆல் மூலங்களை குறைக்க- Diminish the roots of by 2

தீர்வு:

1	-5	7	-4	5
	2	-6	2	-4
	-3	1	-2	1
	2	-2	-2	
	-1	-1	-4	
	2	2		
	1	1		
	2			
	3			

1, 3, 1, -4, 1. சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் $\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$

எடுத்துக்காட்டு: 4 $3x^4 + 7x^3 - 15x^2 + x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூல்கங்களை 7 ஆல் அதிகரிக்க Increase by 7 the roots of the equation $3x^4 + 7x^3 - 15x^2 + x - 2 = 0$.

தீர்வு:

3	7	-15	1	-2
	-21	98	-581	4060
	- 14	83	-580	4058
	-21	245	-2296	
	-35	328	-2876	
	-21	392		
	-56	720		
	-21			
	-77			

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $3x^4 - 77x^3 + 720x^2 - 2876x + 4058 = 0$

பயிற்சிக் கணக்குகள்:

1. Diminish by 3 the roots of the equation $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x + 6 = 0$

$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை 3ஆல் குறைக்க

(விடை: $\boldsymbol{x^5 + 11x^4 + 42x^3 + 57x^2 - 13x - 60 = 0}$)

2. Find the equation each of whose roots exceeds by 2 a root of equation $x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$ **(விடை:** $\boldsymbol{x^4 + 3x^3 + x^2 - 17x - 19 = 0}$)

3. Find the equation whose roots are the roots of $4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$ each increased by 2. **(விடை:**$\boldsymbol{x^5 - 40x^4 - 34x^3 - 308x^2 + 303x - 129 = 0}$)

$4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை 2ஆல் அதிகரித்தால் சமன்பாட்டை காண்க.

Removal of terms

எடுத்துக்காட்டு: 1

Find the relation between the coefficients in the equation
$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ in order that the coefficients of x^3 and x may be removable by the same transformation.

தீர்வு:

Let us reduce the roots of the equation by h. Instead of x substitute $x + h$, the transformed equation is

$(x+h)^4 + p(x+h)^3 + q(x+h)^2 + r(x+h) + s = 0.$

i.e., $x^4 + (4h + p)x^3 + (6h^2 + 3ph + q)x^2 +$

$$(4h^3 + 3ph^2 + 2qh + r)x + h^4 + ph^3 + qh^2 + rh + s = 0.$$

x^3 **ன் கெழு மற்றும்** x in the transformed equation are zeros.

$\therefore 4h + p = 0.\ 4h^3 + 3ph^2 + 2qh + r = 0.$

$h = -\frac{p}{4}.$

$$\therefore\ 4\left(-\frac{p}{4}\right)^3 + 3p\left(-\frac{p}{4}\right)^2 + 2q\left(-\frac{p}{4}\right) + r = 0$$

i.e., $p^3 - 4pq + 8r = 0.$

எடுத்துக்காட்டு: 2

இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கித் தீர்க்க: $x^4 + 20x^3 - 143x^2 + 430x + 462 = 0$

தீர்வு:

Let us assume that by diminishing the roots by h, the second term is removed.

Then the transformed equation becomes

$$(x+h)^4 + 20(x+h)^3 - 143(x+h)^2 + 430(x+h) + 462 = 0$$

i.e., $x^4 + (4h+20)x^3 + \cdots = 0$

$\therefore\ 4h + 20 = 0, h = -5.$

சமன்பாடுகளில் இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கி சமன்பாட்டின் மூலங்களை 5 ஆல் அதிகரிக்க

1	20	143	430	462	-5
	-5	-75	-340	-450	
	15	68	90	12	
	-5	-50	-90		
	10	18	0		
	-5	-25			
	5	-7			
	-5				
	0				

சமன்பாடு $y^4 - 7y^2 + 12 = 0.$

i.e., $(y^2-3)(y^2-4)$

$\pm\sqrt{3}$, ± 2. சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

சமன்பாட்டின் உன்மையான மூலங்கள்

$\sqrt{3}-5, -\sqrt{3}-5, 2-5, -2-5$.

i.e., $5 \pm \sqrt{3}, -3, -7$

பயிற்சி வினாக்கள்:

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளில் இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கி எழுதுக.

$x^2-6x^2+10x-3=0$. **(விடை: $\boldsymbol{x^3-2x+1=0}$)**

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கித் தீர்வைக் கண்டுபிடி.

$i)$ $x^4-12x^3+48x^2-72x+35=0$. **(விடை: $\boldsymbol{3 \pm \sqrt{2}, 1, 5}$).**

$ii)$ $x^4+16x^3+83x^2+152x+84=0$. **(விடை:$\boldsymbol{-2, -6, -7, -1}$).**

$iii)$ $x^3+6x^2+12x-19=0$. **(விடை: $\boldsymbol{1, -2, +3\omega, -2+3\omega^2}$).**

To Form an equation whose roots are any power of the roots of a given equation.

எடுத்துக்காட்டு: 1

Find the equation whose roots are the squares of the roots of the equation

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

தீர்வு:

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

$$x^n-p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2} - \cdots = (+x+\alpha_1)(+x+\alpha_2)\ldots(+x+\alpha_n)$$

$\therefore$ $(x^2-{\alpha_1}^2)\,(x^2-{\alpha_2}^2)\ldots(x^2-{\alpha_n}^2)$

$$= (x^n+p_2x^{n-2}+p_4x^{n-4}+\cdots)^2 - (p_1x^{n-1}+p_3x^{n-3}+\cdots)^2$$

x^2 -ஐ y என மாற்றி எழுத

$$y-{\alpha_1}^2)\,(y-{\alpha_2}^2)\ldots y-{\alpha_n}^2) = y^n+(2p_2-{p_1}^2)y^{n-1}+\cdots$$

$\therefore\ y^n + (2p_2 - {p_1}^2)y^{n-1} + \cdots = 0$

$${\alpha_1}^2, {\alpha_2}^2, \ldots {\alpha_n}^2.$$

எடுத்துக்காட்டு: 2

Find the equation whose roots are the squares of the roots of $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0.$

தீர்வு:

α, β, γ மற்றும் δ என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

x -ஐ $-x$ என மாற்றி எழுத

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)$$

$\therefore (x^4 + 2x^2 + 1)^2 - (x^3 + x)^2 = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2)(x^2 - \delta^2)$

x^2 -ஐ y என மாற்றி எழுத

$$(y^2 + 2y + 1)^2 - y(y+1)^2 = (y - \alpha^2)(y - \beta^2)(y - \gamma^2)(y - \delta^2)$$

$$\therefore\ (y^2 + 2y + 1)^2 - y(y+1)^2 = 0$$

அதாவது

$$y^4 + 3y^3 + 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு: 3

Find the equation whose roots are the cubes of the roots of $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$

தீர்வு:

If the cube roots of the unity are $1, \omega, \omega^2$

$$(P + Q + R)\ (P\omega\, Q + \omega^2 R)(P + \omega^2 Q + \omega\, R) = P^3 + Q^3 + R^3 - 3PQR.$$

α, β, γ மற்றும் δ என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

அதாவது $(1 - x^3) + x(3 + x^3) + 2x^2 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \qquad \ldots (1)$

x -ஐ ωx என மாற்றி எழுத

$$(1-x^3)+\omega x(3+x^3)+2\omega^2x^2 = (\omega x-\alpha)(\omega x-\beta)(\omega x-\gamma)(\omega x-\delta) \quad \ldots (2)$$

x -ஐ $\omega^2 x$ என மாற்றி எழுத

$$(1-x^3)+\omega^2 x(3+x^3)+2\omega x^2 = (\omega^2 x-\alpha)(\omega^2 x-\beta)(\omega^2 x-\gamma)(\omega^2 x-\delta) \ldots (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) மற்றும் (3) ஐ பெருக்கக் கிடைப்பது

$$\{(1-x^3)+x(3+x^3)+2x^2\}.$$

$$\{(1-x^3)+\omega x(3+x^3)+2\omega^2x^2\}.$$

$$\{(1-x^3)+\omega^2x(3+x^3)+2\omega x^2\}$$

$$=\prod(x-\alpha)(\omega x-\alpha)(\omega^2x-\alpha)$$

அதாவது $(P+Qx+Rx^2)\,(P+Q\omega x+R\omega^2x^2)(P+\omega^{x2}Q+\omega x^2\,R)$

$$=\prod\{-\alpha^3+\alpha^2x(1+\omega+\omega^2)-\alpha x^2(\omega+\omega^3+\omega^2)+\omega^3x^3\}$$

$$=\prod(x^3-\alpha^3)$$

இங்கு

$P=1-x^3, Q=(3+x^3),\ R=2x^2$

அதாவது $P^3+Q^3x^3+R^3x^6-3x^3P.Q.R=(x^3-\alpha^3)(x^3-\beta^3)(x^3-\gamma^3)(x^3-\delta^3)$

அதாவது $(1-x^3)^3+(3+x^3)^3x^3+8x^{\,6}-6x^3(1-x^3)(3+x^3)$

$$=(x^3-\alpha^3)(x^3-\beta^3)(x^3-\gamma^3)(x^3-\delta^3)$$

$x^3=y$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$(1-y)^3+(3+y)^3y+8y^2-y(1-y)(3+y)$$

$$=(y-\alpha^3)(y-\beta^3)(y-\gamma^3)(y-\delta^3)$$

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha^3,\beta^3,\gamma^3,\delta^3$ ஆகும்.

$$(1-y)^3+(3+y)^3y+8y^2-y(1-y)(3+y)=0$$

அதாவது

$$y^4 + 14y^3 + 50y^2 + 6y + 1 = 0$$

பயிற்சி வினாக்கள்:

1. α, β, γ மற்றும் δ என்பன $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் $(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)(\delta^2+1) = (1-q+s)^2 + (p-r)^2$ எனக் காட்டுக.

2. α, β, γ என்பன $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் $a^2(1+\alpha^2)(1+\beta^2)(1+\gamma^2) = (a-3c)^2 + (3b-d)^2$ எனக் காட்டுக.

Transformation in general

எடுத்துக்காட்டு: 1

α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0,$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் $\alpha - \frac{1}{\beta\gamma}, \beta - \frac{1}{\gamma\alpha}, \gamma - \frac{1}{\alpha\beta}$ இவற்றை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க.

தீர்வு:

$\alpha - \frac{1}{\beta\gamma}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$= \alpha - \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \alpha - \frac{\alpha}{-r} \; since \; \alpha\beta\gamma = -r$$

$$= \alpha + \frac{\alpha}{r}.$$

$$\therefore \;\; y = x + \frac{x}{r}.$$

∴தேவையான சமன்பாடு

$$y = x + \frac{x}{r} \qquad \ldots(1)$$

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \qquad \ldots(2)$$

∴ (1) லிருந்து நமக்கு கிடைப்பது $x = \frac{yr}{1+r}$

இந்த மதிப்புகளை (2)ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$r^2 r^3 + pr(1+r)y^2 + q(1+r)^2 y + (1+r)^3 = 0.$

எடுத்துக்காட்டு: 2

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் a, b, c என்க.

$bc - a^2, ca - b^2, ab - c^2$ என்ற மூலங்களை கொண்ட சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு:

$bc - a^2 = \frac{abc}{a} - a^2$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$= -\frac{r}{a} - a^2 \ since\ abc = -r$$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு

$y = -\frac{r}{x} - x^2$ …(1)

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ …(2)

$\therefore$ (1) லிருந்து நமக்கு கிடைப்பது $x^3 + xy + r = 0$ …(3)

$\therefore$ (3) லிருந்து (2)ஐ கழிக்க

$px^2 + qx - xy = 0$

i.e., $x(px + q - y) = 0$

ie., $x = 0\ or\ px + q - y = 0.$

x-ஐ பூச்சியமாக எடுத்துக்கொள்ள முடியாது.

$\therefore px + q - y = 0$

$$\therefore x = \frac{y-q}{p}.$$

இந்த மதிப்புகளை (2)ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$\left(\frac{y-q}{p}\right)^3 + p.\left(\frac{y-q}{p}\right)^2 + q.\left(\frac{y-q}{p}\right) + r = 0$$

i.e., $y^3 + (p^2 - 3q)y^2 + (3q^2 - p^2 q)y + p^3 r - q^3 = 0.$

எடுத்துக்காட்டு: 3

$x^3 - 6x + 7 = 0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ என்க.

$\alpha^2 + 2\alpha + 3, \beta^2 + 2\beta + 3, \gamma^2 + 2\gamma + 3.$ என்ற மூலங்களை கொண்ட சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு:

$x^3 - 6x + 7 = 0$ ….(1)

$y = x^2 + 2x + 3$

i.e., $x^2 + 2x + (3 - y) = 0$ …(2)

சமன்பாடு (2)-ஐ x ஆல் பெருக்கி (1)லிருந்து கழிக்க,

$2x^2 + (9 - y)x - 7 = 0$ …(3)

(2) மற்றும் (3) லிருந்து

$$\frac{x^2}{-14 - (9 - y)(3 - y)} = \frac{x}{7 + 2(3 - y)} = \frac{1}{(9 - y) - 4},$$

$(13 - 2y)^2 = (5 - y)(-y^2 + 12y - 41)$

i.e., $y^3 - 21y^2 + 153y - 374 = 0.$

எடுத்துக்காட்டு: 4

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ எனில்

$\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1, \gamma^2 + 1.$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1).$

$y = x^2 + 1$ …(1)

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ …(2)

(2) ஐ மாற்றி எழுத

$x(x^2 + q) = -(px^2 + r)$

i.e., $x(y-1+q) = -\{p(y-1)+r\}$

$x^2 = y-1.$

வர்க்கப்படுத்த,

$x^2(y-1+q)^2 = \{p(y-1)+r\}^2$

i.e., $(y-1)(y-1+q)^2 = \{p(y-1)+r\}^2$

i.e., $y^3 + y^2\, term + y\, term - (q-1)^2 - (p-r)^2 = 0.$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha^2+1, \beta^2+1, \gamma^2+1.$

$\therefore$ மூலங்களின் பெருக்கல்

$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1) = (q-1)^2 + (p-r)^2.$

பயிற்சி வினாக்கள்:

1. α, β, γ என்பன $x^3 + +qx + r = 0,$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் $\beta\gamma + \alpha, \gamma\alpha + \beta, \alpha\beta + \gamma$.மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாட்டை கண்டறிக.

(விடை: $\boldsymbol{y^3 - qy^2 + (q+3r)y + r - (q+r)^2 = 0}$).

2. α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0,$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ இவற்றை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க.

(விடை: $\boldsymbol{y^3 + (2q - p^2)y^2 + (q^2 - 2pr)y - r^2 = 0}$).

3. α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0,$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

i) $\frac{1}{\beta+\gamma-\alpha} + \frac{1}{\gamma+\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}.$ **(விடை:$\boldsymbol{\frac{q}{2r}}$)**

ii) $\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right).$ **(விடை: $\boldsymbol{\frac{q^3+8r^2}{r^3}}$)**

4. θ என்பது $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் எனில் மற்றொரு மூலம் $\theta^2 - 2$ எனக் காட்டுக.

Descartes’ rule of signs

எடுத்துக்காட்டு: 1

Determine completely the nature of the roots of the equation $x^5 - 6x^2 - 4x + 5 = 0$

தீர்வு:

+ - - +.**இந்த உறுப்புகளின் தொடர்**

இரு குறிகள் மாறியிருக்கும் எனவே இரு மிகை மூலங்களுக்கு மேல் இருக்காது இங்கு குறியை மாற்றுக

$$-x^5 - 6x^2 + 4x + 5 = 0$$

i.e., $x^5 + 6x^2 - 4x - 5 = 0$

+ + - -.**இந்த உறுப்புகளின் தொடரின் குறி இங்கு குறியில் ஒரே ஒரு மாற்றம் மட்டும்**

ஒரு குறை மூலங்களுக்கு மேல் இருக்காது சமன்பாட்டின் மொத்த மூலங்கள் 5 குறைந்தது சமன்பாட்டின் இரு கற்பனை மூலங்கள் இருக்கும்.

$$x \;=\; -\infty \;\; -2 \;\; -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \infty$$

$$x^5 - 6x^2 - 4x + 5 = \; - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad +$$

0 &1, 1 & 2, **மிகை மூலங்கள்**

-2 & -1. **குறை மூலங்கள்**

<u>பயிற்சி வினாக்கள்:</u>

1. $x^7 - 3x^4 + 2x^3 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடு குறைந்தபட்சம் 4 கற்பனை மூலங்களையாவது கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டு.

2. $x^6 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாடு குறைந்தபட்சம் 4 கற்பனை மூலங்களையாவது கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டு.

3. $x^4 + 3x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடு 2 மெய் மற்றும் 2 கற்பனை மூலங்களை கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டு.

4. $x^5 + 5x - 7 = 0$ என்ற சமன்பாடு எத்தனை கற்பனை மூலங்களை கொண்டிருக்கும் என கண்டறிக. **(விடை: $\mathbf{4}$)**

4. மதிப்பிடுக: $\lim_{x \to 1} \frac{logx}{x^2-3x+2}$ $[\boldsymbol{Ans}: \mathbf{-1}]$

அலகு - 4

அணிகள்

நீங்கள் இந்த பாடத்தை முடித்த பிறகு தெரிந்து கொள்வது.

- அணிகளின் வகைகள், அணிகளின் மாற்றம் கொள்வது.
- நேர்மாறு அணி மற்றும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு.

4.1 அணிகள்:

ஒரு அணி என்பத செவ்வக வடிவில் எண்களை நிறைகள் மற்றும் நிரல்களாக தொகுப்பது m×n அணியின் பொது அமைப்பு.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

தனியாக உள்ள எண்களின் தொகுப்பு உறுப்புக் எனப்படும். அந்த உறுப்புகள் மிகை (அல்லது) குறை எண்களாக இருக்கலாம். {}அல்லது () குறியீடுக் செவ்வக வடிவில் தொகுப்பதற்கு பய்படுகிறது. [] குறியீட்டை அணியை குறிப்பதற்கு பயன் படுத்துகிறோம்.

4.2 அணிகளின் வகைகள்:

(i) நிறை அணி: ஒரு அணியானது ஒரே ஒரு நிறையை கொண்டிருந்தால் அது நிரல் அணி எனப்படும்.

ஊதாரணம்: [1 -2 0.3]

(ii) நிரல் அணி: ஒரு அணியானது ஒரே ஒரு நிரலை கொண்டிருந்தால் நிறை அணி எனப்படும்.A matrix consisting of a single column is called a column matrix.

ஊதாரணம் : $\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{bmatrix}$

(iii) சதுர அணி: ஒரு அணியானது நம் எண்ணிக்கையில் நிறையையும் நிரலையும் இருந்தால் அது சதுர அணி எனப்படும்.

ஊதாரணம்: a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(iv) மூலைவிட்ட அணி: ஒரு சதுர அணியை மூலைவிட்ட அணி மூன்று வேறு வேண்டுமானால் அதன் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும்.

ஊதாரணம்: a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(v) திசையிலி அணி: ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புக் ஒரே எண்ணை கொண்டிருந்தால் அதை திசையிலி அணி என்போம்.

ஊதாரணம்: a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(vi) அலகு அணி: ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றாக இருந்தால் அலகு அணி என்பர்.

ஊதாரணம்: a) I= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(vii) பூஜ்ஜிய அணி: ஒரு அணி அனைத்து உறுப்புகாக பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் பூஜ்ஜிய அணி என்பர்.

ஊதாரணம்: a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(viii) சம அணி: இரு அணிகள் சமம் எனில் அதன் வரிசையும் மற்றும் நிகரான உறுப்புகள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

ஊதாரணம்: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

a=1,b=2,c=3,d=4 எனில் A மற்றும் B சமம்.

(ix) மாற்று அணி: மாற்று அணியை A^T என குறிப்பர். A^T என்பது A-யின் நிரல்களை நிறைகளாக மாற்றுவதால் கிடைக்கும்.

ஊதாரணம்: If A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

(x) அணியின் திசையிலி பெருக்கல்: அணி A வில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் k என்ற எண்ணால் பெருக்க கிடைக்கும் அணியே அணியின் திரையிலி பெருக்கல் அணியாகும்.

ஊதாரணம்: If A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$-4A = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -4 & 0 \\ 8 & -20 \end{bmatrix}$$

4.3 அணியின் சில செயல்பாடுகள்:

(i) இரு அணியின் கூடுதல்: அணியின் கூடுதலானது அந்த அணியின் நிகரான உறுப்புகளின் கூடுதல். மேலும் இரு அணியின் வரிசை சமமாக இருக்க வேண்டும். கிடைக்கப் பெறும் அணியின் வரிசையும் அதுவாகும்.

ஊதாரணம்: (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

$$A+B = \begin{bmatrix} 4+0 & -1+5 & 3+3 \\ 0+2 & 5-1 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

(ii) இரு அணியின் கழித்தல்: இரு சம வரிசையுள்ள அிகளை அதன் நிகரான உறுப்புகளை கழிக்க வேண்டும்.

ஊதாரணம்: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

$$A+B = \begin{bmatrix} 4-0 & -1-5 & 3-3 \\ 0-2 & 5+1 & 0-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

(iii) இரு அணியின் பெருக்கல்: mxn வரிசையுடைய A யும், nxp வரிசையுடைய B அணியின் அதன் பெருக்கல் AB ஆகும். அதனை C எனவும் அதன் வரிசை mxp ஆகும். அதில் $Cij_{ஐ}$ Aயின் iவது நிரலையும், B யின் j யின் நிறையையும் சிகராக பெருக்களின் கூடுதல் ஆகும்.

குறிப்பு:

முதல் அணியின் நிறைகளின் எண்ணிக்கையும் இரண்டாவது அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்க வேண்டும். அப்போது மட்டும் பெருக்கல் அணி சாத்தியமாகும்.

ஊதாரணம்:

$$(1)\ \text{If}\ A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \\ b31 & b32 \end{bmatrix}$$

Aயின் வரிசை 3x3 மற்றும் Bயின் வரிசை 3x2.

∴ எனவே பெருக்கல் சாத்தியமாகும் மற்றும் தொகு அணி ABன் வரிசை 3x2

அதாவது முதல் அணியின் நிரலும் இரண்டாவது அணியின் நிறையின் எண்ணிக்கை 3 மற்றும்

$$AB = \begin{bmatrix} a11xb11 + a12xb21 + a13xb31 & a11xb12 + a12b22 + a13xb32 \\ a21xb11 + a22xb21 + a23xb31 & a21xb12 + a22xb22 + a23xb32 \\ a31xb11 + a32xb21 + a33xb31 & a31xb12 + a32xb22 + a33xb32 \end{bmatrix}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3x2}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2x3}$

Aன் நிரல் 3, Bன் நிறை 3 எனவே சாத்தயமாகும். ABன் வரிசை 2x2.

$$AB=\begin{bmatrix} 1x1 + 2x3 + 3x0 & 1x(-2) + 2x0 + 3x(-1) \\ 4x1 + 5x3 + 6x0 & 4x(-2) + 5x0 + 6x(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+6+0 & -2+0-3 \\ 4+6+0 & -8+0-6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -14 \end{bmatrix}_{2x2}$$

குறிப்பு:

1. A யும் B யும் சதுர அணியாக இருந்தால் மட்டுமே பெருக்கல் ABயும், BAயும் சாத்தயமாகும்.
2. AB யும் BA யும் சமமாக இருக்க அவசியமில்லை. அணிப் பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பு கொண்டது
3. A,B மற்றும் C என்ற மூன்று அணிகள் A(BC) மற்றும் (AB)C சாத்தியமெனில் A(BC)=(AB)C பங்கீட்டு அணி பெருக்கல் மற்றும் கூடுதல் பொருத்து விதிக்கு உட்பட்டது.
4. B+C,AB,AC சாத்தியமெனில் அதாவது A(B+C)=AB+AC.

ஊதாரணம்4.1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

எனில் 2A-3B+AB

தீர்வு:

முதலில் 2A-3B ஐ கண்டுபிடி

$$2A-3B = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} -3\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 10 & 0 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 9 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 & 7 \\ -3 & 2 & 14 \\ 10 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

பிறகு ABஐ காண்க

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0+0 & 1+0+2 & -1+0+2 \\ 6+3+0 & 3+0+4 & -3-2+4 \\ 10+0+0 & 5+0+6 & -5+0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & -1 \\ 10 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A - 3B + AB = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 7 \\ -3 & 2 & 14 \\ 10 & -3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \\ 10 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 6 & 9 & 15 \\ 20 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

ஊதாரணம் 4.2: அணி Aயின் தீர்வை காண்

$$3A + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

தீர்வு:

$$3A + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = 1/3 \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ஊதாரணம் 4.3: அணி A மற்றும் அணி B ஐ $A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ மற்றும் $A - B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ வில் இருந்து காண்க.

தீர்வு:

$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ …………(1)

$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ …………(2)

(1) மற்றும் (2)ஐ கூட்ட,

$2A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ஐ (1)ல் பிரதியிட

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - A$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

ஊதாரணம் 4.4: a,b,c ன் மதிப்புகளை காண்க.

$$3\begin{bmatrix} 2 & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & a+2 \\ b+c & 3 \end{bmatrix}$$

தீர்வு:

$$2 \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & a+2 \\ b+c & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3a \\ 3b & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6+a+2 \\ -1+b+c & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & a+8 \\ b+c-1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore 3a = a+8 \Longrightarrow 2a = 8 \Longrightarrow a = 4$

$3c = 3 \Longrightarrow c=3$

$3b = b+c-1 \Longrightarrow 2b = c-1 = 3-1 = 2 \Longrightarrow b=2$

$\therefore (a,b,c) = (4,3,2)$

ஊதாரணம் 4.5: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, AB மற்றும் BA காண்க. AB = BA எனப்பார்

தீர்வு:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x1 + 1x-2 & 3x-1+1x3 \\ 2x1+5x-2 & 2x-1+5x3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & -3+3 \\ 2-10 & -2+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -13 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1x3+1x2 & 1x1+1x5 \\ -2x3+3x2 & -2x1+3x5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & 1-5 \\ -6+6 & -2+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -13 \end{bmatrix}$$

எனவே AB $\neq$ BA

ஊதாரணம் 4.6: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ மற்றும் C= [1 -2] என்ற அணியிலிருந்து

A(BC) = (AB)C எனப்பார்

தீர்வு:

$$BC = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [\,1 \;\; -2\,]$$

$$= \begin{bmatrix} 1x1 & 1x-2 \\ 1x1 & 1x-2 \\ 2x1 & 2x-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

A(BC) $=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2x1 + 3x1 \pm 1x2 & 2x - 2 + 3x - 2 \pm 1x - 4 \\ 3x1 + 0x1 + 2x2 & 3x - 2 + 0x - 2 + 2x - 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 + 3 - 2 & -4 - 6 + 4 \\ 3 + 0 + 4 & -6 + 0 - 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -14 \end{bmatrix}$

AB = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2x1 + 3x1 + 1x2 \\ 3x1 + 0x1 + 2x2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 + 3 - 2 \\ 3 + 0 + 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix}$

A(BC) = $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ [1 -2]

$= \begin{bmatrix} 3x1 & 3x - 2 \\ 7x1 & 7x - 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -14 \end{bmatrix}$

எனவே A(BC) = (AB)C

ஊதாரணம் 4.7: A= [2 -3] , B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$,C = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில்

A(B+C) = AB + AC நிருபி.

தீர்வு:

B+C $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

A(B+C) = [2 -3] $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$= [2x5+(-3)x5 \quad 2x0+(-3)x7]$

$= [10-15 \quad 0-21]$

$= [-5 \quad -21]$

AB $= [2 \quad -3] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$= [2x2+(-3)x4 \quad 2x1+(-3)x5]$

$= [4-12 \quad 2-15]$

$= [-8 \quad -13]$

AC $= [2 \quad -3] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= [2x3+(-3)x1 \quad 2x(-1)+(-3)x2]$

$= [6-3 \quad -2-6]$

$=[3 \quad -8]$

AB+AC $= [8 \quad -3] + [3 \quad -8]$

$= [-5 \quad -21]$

எனவே A(B+C) = AB+AC

4.4 சதுர அணியின் அணிக் கோவை:

சதுர அணியின் அணிக் கோவை ஒரு எண் மற்றும் அதனை det A அல்லது IAI என குறிப்பர். 2x2 அணியின் அணிக்கோவை $A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$ எனில் $|A| = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} =$ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

3x3 அணியின் அணிக்கோவை.

$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$ எனில்

$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$

$+a_{13}\begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$

$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$

ஊதாரணம்

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$|A|$= 1x4 – 3x2 = 4-6 = -2

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

= 1[1x1-(-2)x0]-2[2x1-1x0]-1[2x(-2)-1x1]

= 1(1+2)-2(2-0)-1(-4-1)

= 1(3)-2(2)-1(-5)

= 3-4+5

= 4

(i) பூஜ்ஜிய கோவை அணி: ஒரு சதுர அணி A ஆனது பூஜ்ஜியக் கோவை எனில் $|A|$=0

ஊதாரணம் If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் $|A|$=0

∴A ஒரு பூஜ்ஜிய கோவை

(ii) பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி: ஒரு சதுர அணி A ஆனது பூஜ்ஜய மற்ற கோவை எனில் $|A| \neq 0$

ஊதாரணம் If $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் $|A|=12\neq0$

∴A ஒரு பூஜ்ஜியக் கோவை

(iii) துணை அணி: கொடுக்கப்ட்ட அணி A, அதில் உள்ள சில எண்ணிக்கையுடைய நிறையை அல்லது நிரலை நீங்கும்போது கிடைக்கப் பெறும் அணியை துணை அணி என்பர்.

ஊதாரணம்: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ எனில் $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ஒரு துணை அணி

(iv) ஒரு உறுப்பின் சிற்றி: ஒரு அணி $A=[a_{ij}]$ஒரு உறுப்பு a_{ij} ன் சிற்றணி என்பது அதற்கு நிகராக உள்ள iஆவது நிறை மற்றும் j வது நிரலை நீக்க கிடைக்கும் அணிக் கோவையாகும்.

ஊதாரணம்: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$,

1-ன் சிற்றணி $\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$

$=0x4 - (-4)x(-5)= - 20$

-2-ன் சிற்றணி $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$=2x4-(5)x(-5)=28$

-3-ன் சிற்றணி $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$

$=2x(-4)-5x0=-8$

2-ன் சிற்றணி $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$

$= - 8-12=-20$

. . . .

4-ன் சிற்றணி $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$=0+4=4$

(v) ஒரு உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவை: a_{ij} ன் சிற்றணி கோவை என்பது அதன் சிற்றணி மற்றும் $(-i)^{i+j}$ பெருக்கு கிடைப்பதாகும். இதனை A_{ij} என குறிப்பர்.

ஊதாரணம்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(a_{11}) = 1-ன் சிற்றணி கோவை $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

(a_{32}) = 8- ன் சிற்றணி கோவை $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

(vi) சிற்றணி கோவை அணி: $A = [a_{ij}]$ என்ற அணியின், சிற்றணிக் கோவை அணியானது, A யில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கு பதிலாக அதன் சிற்றணி கோவை அணியின் A என பிரதியிட வேண்டும். இதனை $A = [a_{ij}]$ எனக் குறிப்பர்.

(vii) சேர்ப்பு அணி: ஒரு சதுர அணி A-ன் சேர்ப்பு அணியானது சிற்றணி கோவை அணியின் மாற்று அணியாகும். இதனை adjA = (சிற்றணி கோவை $A)^T$.

(viii) நேர்மாறு அணி: பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகள் $\frac{adjA}{IAI}$ன் நோர் மாறு அணி என்பது . இதனை A^{-1} என குறிப்பர்.

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$

குறிப்பு: (i) A-ன் நேர்மாறு அணி A^{-1}.

மேலும் $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$

(ii) A மற்றும் B என்ற இரு அணிகள் AB=BA=I எனில் A மற்றும் B யானது ஒன்றுக் கொன்று நேர்மாறு அணியாகும். are any two matrices such that AB=BA=I. Then A and B are the inverse of each other.

$A^{-1}=B$ மற்றும் $B^{-1}=A$

ஊதாரணம் 6.8: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$-ன் நேர்மாறு காண்க

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

2-ன் சிற்றணி கோவை= $(-1)^{1+1}(3)=3$

1-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{1+2}(-1)=1$

-1-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{2+1}(1)=-1$

3-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{2+2}(2)=2$

∴Adj(A) = (சிற்றணி கோவை $A)^T$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2x3-(-1)x1 = 6+1 = 7$

$\therefore A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ஊதாரணம் 6.9

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$-ன் நேர்மாறு அணி காண்க

தீர்வு:

1-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= +(3-8) = -5$

2-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

$= -(0+12) = -12$

-1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= +(0+9) = 9$

0-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -(2+2) = -4$

3-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

$= +(1-3) = -2$

4-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -(2+6) = -8$

-3-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= +(8+3) = 11$

2-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

$= -(4-0) = -4$

1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= +(3-0) = 3$

$\therefore$A-ன் சிற்றணி $= \begin{bmatrix} -5 & -12 & 9 \\ -4 & -2 & -8 \\ 11 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ adj (A) = (சிற்றணி கோவை A)^T

$$= \begin{bmatrix} -5 & -4 & 11 \\ -12 & -2 & -8 \\ 9 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$= 1(3-8)-2(0+12)-1(0+9)$

$= 1(-5)-2(12)-1(9)$

$= -5-24-9$

$= -38$

$$\therefore A^{-1} = \frac{-1}{38}\begin{bmatrix} -5 & -4 & 11 \\ -12 & -2 & -8 \\ 9 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

ஊதாரணம் 9.10: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ நிருபி $A^3-13A+12I = 0$. மேலும் A^{-1} ஐ காண்க

தீர்வு:

இங்கு $A^2 = A.A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+4+0 & 4+2+0 & 0+2+0 \\ 4+2-7 & 4+1+2 & 0+1-3 \\ -14+4+21 & -14+2-6 & 0+2+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ -1 & 7 & -2 \\ 11 & -18 & 11 \end{bmatrix}$$

$A^3 = A^2.A$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ -1 & 7 & -2 \\ 11 & -18 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16+12-14 & 16+6+4 & 0+6-6 \\ -2+14+14 & -2+7-4 & 0+7+6 \\ 22-36-77 & 22-18+22 & 0-18-33 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 26 & 0 \\ 26 & 1 & 13 \\ -91 & 26 & -51 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 13A + 12I = \begin{bmatrix} 14 & 26 & 0 \\ 26 & 1 & 13 \\ -91 & 26 & -51 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix}26 & 26 & 0\\26 & 13 & 13\\91 & 26 & 39\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}12 & 0 & 0\\0 & 12 & 0\\0 & 0 & 12\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 0$$

A^{-1} மேலும் $A^3 - 13A + 12I = 0$ இதனை பயன்படுத்தி A^{-1}–ஐ காண்க.

A^{-1}ஐ இருபுறமும் பெருக்க

$A^{-1}A^3 - 13\ A^{-1}A + 12\ A^{-1}I = 0$

$(A^{-1}\ A)A^2 - 13(A^{-1}A) + 12\ A^{-1} = 0 \qquad (A^{-1}I = A^{-1})$

$IA^2 - 13I + 12\ A^{-1} = 0 \qquad (A^{-1}A = I)$

$A^2 - 13I + 12\ A^{-1} = 0 \qquad (I\ A^2 = A^2)$

$\therefore 12A^{-1} = (13I - A^2)$

$$= \begin{bmatrix}13 & 0 & 0\\0 & 13 & 0\\0 & 0 & 13\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8 & 6 & 2\\-1 & 7 & -2\\11 & -18 & 11\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5 & -6 & -2\\1 & 6 & 2\\-11 & 18 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix}5 & -6 & -2\\1 & 6 & 2\\-11 & 18 & 2\end{bmatrix}$$

4.5 நேரிய சமன்பாடுகள்:

அணி இயற்கணிதத்தின் முக்கியமான செயல் முறை மற்றும் குறிக்கோள் நேரிய சமன்பாடுகளை தீர்வு காண்பதாகும். இப்போது இரு முறைகள் () கிராமரின் விதி அல்லது அணிக் கோவை முறை மற்றும் நேர்மாறு அணி முறை கொ்டு நேரிய சமன்பாடுகளை தீர்வுகளை காணலாம்.

(i): கிராமரின் விதி அல்லது அணிக் கோவை முறை

படி 1: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை நேரிய சமன்பாடுகள் அமைப்பதற்கு மாற்றவும்.

படி 2: கெழுக்களின் அணி A அமைக்கவும்.

படி 3: அணிக்கோவை A ஐ காண்க. அதனை Δ என்க.

படி 4: முதல் நிரலை நீக்கவும் மற்றும் அந்த முதல் நிரலில் B நிரல் அணியை சேர்த்து கிடைக்கும் தொகுப்பயன அணியின் அணிக் கோவையின் மதிப்பு காண்க. இதனை Δx எனக் கொள்க.

படி 5: இதே போல் இரண்டு நிரலை நீக்கி B-ஐ சேர்த்து தொகுப்பயன் அணி மற்றும் அதன் அணிக்கோவை மதிப்பை காண்க. இதனை Δy என கொள்க.

படி 6: இதுபோல் Δz-ஐ காண்க

படி 7: கடைசியாக, x ன் மதிப்பு = $\frac{\Delta x}{\Delta}$

y ன் மதிப்பு = $\frac{\Delta y}{\Delta}$

z ன் மதிப்பு = $\frac{\Delta z}{\Delta}$

ஊதாரணம் 4.11: கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளை கிராமரின் விதி அல்லது அணிக் கோவை முறையில் காண்க.

$2x - y = 5$

$3x + 2y = -3$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

AX = B

இதில் A என்பது கெழுக்களின் அணி மற்றும்

B என்பது தொகுப்பயன் அணி

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4+3 = 7$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 15 = -21$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-21}{7} = -3$$

$\therefore (x, y) = (1,-3)$

ஊதாரணம் 4.12: கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளை கிராமரின் விதி அல்லது அணிக் கோவை முறையில் காண்க.

$3x+y+z= 1$
$x + z = 0$
$5x+y+2z=2$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கெழுக்களின் அணி

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(0-1)-1(2-5)+1(1-0)$$

$=-3-1(-3)+1$

$=-3+3+1$

$=1 = \Delta$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =1(0-1)-1(0-2)+1(0-0)$$

$=-1+2$

$=1$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} =3(0-2)-1(2-5)+1(2-0)$$

$=3(-2)-1(-3)+2$

$=-6+3+5$

$=1$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(0-0)-1(2-0)+1(1-0)$$

$=0-2+1$

$=-1$

$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$

$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1$

$\therefore (x, y, z) = (1,1,-1)$

(ii) நேர்மாறு அணி முறை:

படி 1: கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளின், பொதுவாக அமைப்பதற்கு மாற்றவும்.

படி 2: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மாற்றவும் அதாவது AX=B

இதில், $A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$ = கெழுகளின் அணி

$B = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{bmatrix}$ = வலப்புறம் உள் மதிப்புகள் கொண்ட அணி..

படி 3: A^{-1} ன் மதிப்பை காண்க.

படி 4: அணி யின் மதிப்பு A^{-1}ஐ பெருக்க வேண்டும்.

$$X = A^{-1}B$$

ஊதாரணம் 4.13: கொடுக்கபட்ட நேரிய சமன்பாடுகளை நேர்மாறு அணி முறையின் மூலம் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

AX = B

இப்போது, A-ன் நேர்மாறு காண்க.

$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4+3 = 7$

adj(A) காண்க

2-ன் சிற்றணி கோவை= $(-1)^{1+1}(2) = 2$

-1-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{1+2}(3) = -3$

3-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{2+1}(-1) = 1$

2-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{2+2}(2) = 2$

∴adj (A) = (சிற்றணி கோவை A^T) = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -15 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ஊதாரணம் 4.14: கொடுக்கபட்ட நேரிய சமன்பாடுகளை நேர்மாறு அணி முறையின் மூலம் தீர்க்க.

$3x+y+z= 1$
$x + z = 0$
$5x+y+2z=2$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$AX = B$

$$|A|= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(0-1)-1(2-5)+1(1-0)$$

$$=-3-1(-3)+1$$

$=-3+3+1$

$=1$

Adj(A) காண்க

3-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= +(0-1) = -1$

1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= -(2-5) = 3$

1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= +(1-0) = 1$

1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= -(2-1) = -1$

0-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= +(6-5) = 1$

1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= -(3-5) = 2$

1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= +(1-0) = 1$

1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -(3-1) = -2$

2-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= +(0-1) = -1$

adj (A) = (சிற்றணி கோவை A)^T

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad X = A^{-1} B$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0+2 \\ 3+0-4 \\ 1+0-2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ஊதாரணம் 4.15: ஒரு தொழிற்பயிற்சியாள் இரு வகையான தயாரிப்பு A மற்றும் Bஐ உற்பத்தி செய்கிறார். இரு இயந்திரம் M1,M2பயனபடுத்தி அந்த இரு வகையான தயாரிப்பை உற்பத்தி செய்கிறார். அந்த தயாரிப்பு A மற்றும் B செய்ய இயந்திரம் எடுத்து கொள்ளும் நேரம் (மணி நேரம்) கொடுக்கபட்டுள்ளது.

	தயாரிப்புA	தயாரிப்பு B
இயந்திரம் M1	20	10
இயந்திரம M2	10	20

ஒவ்வொரு இயந்திரத்திற்கும் 600 மணிகள் தேவைப்படுகிறது எனில் ஒவ்வொரு வகையில் எத்தனை அலகுகள் என கண்டுபிடி.

தீர்வு:

உற்பத்தி A மற்றும் Bயின் அலகுகள் x மற்றும் y என்க.

கொடுக்கப்பட்டதை அணி வடிவில் எழுதலாம்

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 600 \end{bmatrix}$$

AX = B

$|A| = \begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 400 - 100 = 300$

adj (A) = $\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$

மூலைவிட்ட எண்ணை மாற்றவும் மற்றும் அடுத்த மூலைவிட்ட எண்ணின் குறியை மாற்றவும். (இந்த விதி 2x2அணிக்கு மட்டும்)

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$

$\therefore X = A^{-1} B$

$$= \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 12000 - 6000 \\ -6000 + 12000 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 6000 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 20 அலகுகள் இயந்திரமும் உற்பத்தி செய்கின்றன.

ஊதாரணம் 4.16: ஒரு மருத்துவ மனை தினமும் இயக்க தேவைப்படும். பணம்(C) என்பது உள்-நோயாளி(I) மற்றும் வெளி-நோயாளியின (P) மற்றும் நிலையான தொகையின் கூடுதல்.

$$C = a+bP+cI \quad ....(i)$$

3-நாளைக்கான விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. a,b,c மதிப்புகளை நேரிய சமன்பாடுகள் அமைத்து நேர்மாறு அணி முறையில் காண்க.

நாள்	பணம்	உள் நோயாளியின் எண்ணிக்கை	வெளி நோயாளியின் எண்ணிக்கை
1	6950	40	10
2	6725	35	9
3	7100	40	12

தீர்வு:

அட்டவணையில் உள்ள மதிப்புகளை (i) பிரிதியிட கீழ்கண்ட தொடர் நேரிய சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்

a+10b+40d = 6950
a+9b+35d = 6725
a+12b+40d = 7100

மேலுள்ள சமன்பாட்டை

$$=\begin{bmatrix}1 & 10 & 40\\1 & 9 & 35\\1 & 12 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6950\\6725\\7100\end{bmatrix}$$

AX = B

$$|A|= \begin{vmatrix}1 & 10 & 40\\1 & 9 & 35\\1 & 12 & 40\end{vmatrix}$$

= 1(360-420)-10(40-=35)+40(12-9)

=-60-50+120

=-10

Adj(A) என்க

1-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}9 & 35\\12 & 40\end{vmatrix}$

= +(360-420) = -60

10-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 35\\1 & 40\end{vmatrix}$

= -(40-35) = -5

40-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 9\\1 & 12\end{vmatrix}$

= +(12-9) = 3

1-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}10 & 40\\12 & 40\end{vmatrix}$

= -(400-480) = 80

9-ன் சிற்றணி கோவை = $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 40\\1 & 40\end{vmatrix}$

= +(40-40) = 0

9-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 12 \end{vmatrix}$

$= -(12-10) = -2$

1-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 10 & 40 \\ 9 & 35 \end{vmatrix}$

$= +(350-360) = -10$

12-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 35 \end{vmatrix}$

$= -(35-40) = 5$

40-ன் சிற்றணி கோவை $= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$

$= +(9-10) = -1$

adj (A) = (சிற்றணி கோவை A)^T

$$= \begin{bmatrix} -60 & 80 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{IAI}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{10}\begin{bmatrix} -60 & 80 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 60 & -80 & 10 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 60 & -80 & 10 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6950 \\ 6725 \\ 7100 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 50000 \\ 750 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 75 \\ 30 \end{bmatrix}$$

∴ (a, b, c) = (5000,75,30)

பயிற்சி கணக்குகள்

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -8 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

எனில் (i)4A+2B (ii)BA-B-2C காண்க

விடை: (i) $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 32 & 0 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \\ -38 & 21 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ எனில் x,y,z மற்றும் w ஐ காண்க

விடை: (x, y, z, w) =(2,4,1,3)

3. X மற்றும் Y அணிகளை காண்க $2x - 3y = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $3x+2y = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

விடை: $X = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 25 & 13 \\ 18 & 17 \end{bmatrix}$, $y = \frac{-1}{10}\begin{bmatrix} 8 & -13 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

4. (AB)C = A(BC) if $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ சரிபார்.

5. ஜனவரி மற்றும் பிப்ரவரி மாதத்திற்கான சர்க்கரை மற்றும் அரிசியின் விலைப்பட்டியல் விவரங்களை கீழே கொடுக்கப்பட்டுன.

	சர்க்கரை	அரிசி
ஜனவரி	3	2
பிப்ரவரி	4	3

சர்க்கரை மற்றும் அரிசிக்கு ரூ.80 மற்றும் ரூ.90ஐ ஜனவரி மற்றும் பிப்ரவரி மாதத்தில் ஒரு குடும்பர் செலவு செய்கிறது. அந்த குடும்பம் அதே அளவில் சர்க்கரை மற்றும் வாங்க நினைக்கிறது. ஒவ்வொரு மாதமும் எவ்வளவு சர்க்கரை மற்றும் அரிசி வாங்க வேண்டும்?

6.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் சமன்பாடு $A^3-6A^2+9A-4I = 0$ என நிருபி.

அதிலிருந்து A^{-1}ஐ காண்க

விடை: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$-ன் அணிகோவை மதிப்பு காண்க

விடை: -9

8. A = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$-ன் நேர்மாறு காண்க

விடை: $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேரிய சமன்பாட்டினை அணியைப் பயன்படுத்தி தீர்.
X+y+2z = 4
2x-y+3z = 9
3x-y-z = 2

விடை: (2, -1, 5)

ஐகன் மதிப்பு மற்றும் ஐகன் திசையென்

Let A=[a_{ij}] **என்ற சதுர அணியின் படி** "n" **நிரல் திசையென்** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

AX = λX.

X→ **ஐகன் திசையென்**

λ→ **ஐகன் மதிப்பு**

A=[a_{ij}] **என்ற சதுர அணியின் படி** "n"

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

AX = λX -------→(1)

AX – λX = 0

(A – λI)X = 0 --------→(2)

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

(2)⇒ $(A - \lambda I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= 0 \quad \text{------}\rightarrow(3) \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\,x_n &= 0 \end{aligned}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (4)$$

(4) or $|A - \lambda I| = 0$ சிறப்பியல்பு

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

OR

$\lambda^n - D_1\lambda^{n-1} + D_2\lambda^{n-2} - D_3\lambda^{n-3} + \ldots + (-1)^n D_n = 0$

1. சிறப்பியல்பு சமன்பாடு 2×2 என்ற அணிக்கு

$$\boldsymbol{\lambda^2 - D_1\lambda + D_2 = 0}$$

Where $\boldsymbol{D_1}$ = **Sum of the main diagonal elements (or) Trace of A**

$\boldsymbol{D_2 = \det(A)\ \ (or)\ |A|}$

2. சிறப்பியல்பு சமன்பாடு 3×3 என்ற அணிக்கு

$$\boldsymbol{\lambda^3 - D_1\lambda^2 + D_2\lambda - D_3 = 0}$$

Where D_1 = **Sum of the main diagonal elements (or) Trace of A**

D_2 = **Sum of the 2×2 minors of a main diagonal elements**

$\boldsymbol{D_3 = \det(A) \ \ (or)\ |A|}$

1. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}$ என்ற அணிக்கு சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு:

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^2 - D_1\lambda + D_2 = 0$

$D_1 = 4 + 2 = 6$

$D_2 = \det(A) \ \ (or)\ |A|$

$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\therefore\ \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

2. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}$ என்ற அணிக்கு சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு:

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^2 - D_1\lambda + D_2 = 0$

$D_1 = 1 - 1 = 0$

$D_2 = \det(A) \ \ (or)\ |A|$

$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\therefore \lambda^2 - 0\lambda + 3 = 0$

$i.e., \lambda^2 + 3 = 0$

3. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}}$ என்ற அணிக்கு சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகளை காண்க.

தீர்வு:

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^3 - D_1\lambda^2 + D_2\lambda - D_3 = 0$

$D_1 = 8 + 7 + 3 = 18$

$D_2 = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$

$= 5 + 20 + 20$

$= 45$

$D_3 = \det(A) \ \ (or)\ |A|$

$= \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

$= 8(5) + 6(-10) + 2(10)$

$= 40 - 60 + 20$

$= 0$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\therefore \lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda - 0 = 0$

$i.e., \lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$

பயிற்சிகணக்குகள்

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகளை காண்க.
2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகளை காண்க.

விடைகள்

1. சிறப்பியல்பு $\lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0$
2. சிறப்பியல்பு $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 27\lambda - 0 = 0$

எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}$ ஐகன் மதிப்பு மற்றும் ஐகன் திசையென் காண்க

தீர்வு:

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^2 - D_1\lambda + D_2 = 0$

D_1 = 4 + 2 = 6

D_2 = $\det A = |A|$

= $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 8 – 3 = 5

$\therefore$ சிறப்பியல்பு சமன்பாடு$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

+5

-1 -5

i.e., $(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$

$\therefore$ ஐகன் மதிப்பு $\boldsymbol{\lambda = 1, 5}$.

ஐகன் திசையென் காண்க

(A – λI)X = 0 , $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 3 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad (4 - \lambda)x_1 + 1.x_2 = 0$

$3.x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0$

<u>Case (i): $\lambda = 5$</u>

$-x_1 + 1.x_2 = 0$

$3.x_1 - 3x_2 = 0$

$-x_1 + 1.x_2 = 0$

$$-x_1 = -x_2$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

<u>Case (ii): $\lambda = 1$</u>

$$3.x_1 + 1.x_2 = 0$$

$$3.x_1 + 1.3x_2 = 0$$

$$3.x_1 + 1.x_2 = 0$$

$$3.x_1 = -x_2$$

$$\frac{x_1}{-1} = \frac{x_2}{3}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$ ஐகன் மதிப்பு மற்றும் ஐகன் திசையென் காண்க

தீர்வு:

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^2 - D_1\lambda + D_2 = 0$

$D_1 = -2 + 1 = -1$

$D_2 = \det A = |A|$

$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6$

∴ சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

-6

3 -2

i.e., $(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$

∴ ஐகன் மதிப்பு $\boldsymbol{\lambda = -3,\ 2.}$

ஐகன் வெக்டாரை காண்க (A – λI)X = 0 , $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (-2-\lambda)x_1 + 2.x_2 = 0$$

$$2.x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

<u>Case (i): $\lambda = -3$</u>

$$x_1 + 2.x_2 = 0$$

$$2.x_1 + 4.x_2 = 0$$

Let $x_1 + 2.x_2 = 0$

$$x_1 = -2x_2$$

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Case (ii): $\boldsymbol{\lambda = 2}$

$$-4.x_1 + 2.x_2 = 0$$

$$2.x_1 - x_2 = 0$$

$$2.x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 = x_2$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}}$ ஐகன் மதிப்பு மற்றும் ஐகன் வெக்டாரை காண்க

தீர்வு:

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^3 - D_1\lambda^2 + D_2\lambda - D_3 = 0$

D_1 = 2 + 1 – 3 = 0

D_2 = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

= – 5 – 6 – 2 = – 13

D_3 = $\det A = |A|$

= $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ = 2(– 5) – 2(1) + 0(11) = –10 – 2 = – 12

∴ சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^3 + 0\lambda^2 - 13\lambda + 12 = 0$

1	1	0	– 13	12
	0	1	1	– 12
	1	1	–12	0

i.e., $\lambda = 1, \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$

i.e., $\lambda = 1, (\lambda - 3)(\lambda + 4) = 0$

∴ ஐகன் மதிப்பு $\boldsymbol{\lambda = 1, 3, -4.}$

ஐகன் வெக்டாரை காண்க (A – λI)X = 0, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -7 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} (2-\lambda)x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 &= 0 \\ 2.x_1 + (1-\lambda)x_2 + 1.x_3 &= 0 \\ -7.x_1 + 2.x_2 + (-3-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \textbf{(I)}$$

<u>Case (i): $\lambda = 1$</u>

$$x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 = 0$$
$$2.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$-7x_1 + 2.x_2 - 4.x_3 = 0$$

$$x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 = 0$$
$$2.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & & x_2 & & x_3 & \\ 2 & & 0 & & 1 & & 2 \\ 0 & & 1 & & 2 & & 0 \end{array}$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{-4}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

<u>Case (ii): $\lambda = 3$</u>

$$-1.x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 = 0$$
$$2.x_1 - 2.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$-7x_1 + 2.x_2 - 6.x_3 = 0$$

$$-1.x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 = 0$$
$$2.x_1 - 2.x_2 + 1.x_3 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & & x_2 & & x_3 & \\ 2 & & 0 & & -1 & & 2 \\ -2 & & 1 & & 2 & & -2 \end{array}$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-2}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Case (iii): $\lambda = -4$

$$6.x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 = 0$$
$$2.x_1 + 5.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$-7x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 = 0$$

$$6.x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 = 0$$
$$2.x_1 + 5.x_2 + 1.x_3 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & & x_2 & & x_3 & \\ 2 & & 0 & & 6 & & 2 \\ 5 & & 1 & & 2 & & 5 \end{array}$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-6} = \frac{x_3}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-3} = \frac{x_3}{13}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{bmatrix}}$ ஐகன் மதிப்பு மற்றும் ஐகன் வெக்டாரை காண்க

தீர்வு:

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^3 - D_1\lambda^2 + D_2\lambda - D_3 = 0$

D_1 = 2 + 1 – 4 = – 1

D_2

= $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

= – 10 – 3 + 11 = – 2

D_3 = $\det A = |A|$

= $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ = 2(– 10) + 3(3) + 1(11) = –20 + 9 +11 = 0

∴ சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 0 = 0$

$$\begin{array}{ccc} & -2 & \\ 2 & & -1 \end{array}$$

i.e.,$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$

i.e., $\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$

i.e., $\lambda = 0, (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$

∴ ஐகன் மதிப்பு $\boldsymbol{\lambda = 0, 1, -2}$.

ஐகன் திசையென் காண்க Let (A – λI)X = 0, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-\lambda)x_1 - 3.x_2 + 1.x_3 = 0 \\ 3.x_1 + (1-\lambda)x_2 + 3.x_3 = 0 \\ -5.x_1 + 2.x_2 + (-4-\lambda)x_3 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \textbf{(I)}$$

Case (i): $\boldsymbol{\lambda = 0}$

$$2x_1 - 3.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$3.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 = 0$$
$$-5x_1 + 2.x_2 - 4.x_3 = 0$$

$$2x_1 - 3.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$3.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 = 0$$

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & & x_2 & & x_3 \\ -3 & & 1 & & 2 & & -3 \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{-10} = \frac{x_2}{-3} = \frac{x_3}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{10} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{-11}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{bmatrix}$

Case (ii): $\boldsymbol{\lambda = -2}$

$$4x_1 - 3.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$3.x_1 + 3.x_2 + 3.x_3 = 0$$
$$-5x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 = 0$$

$$4x_1 - 3.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$3.x_1 + 3.x_2 + 3.x_3 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & & x_2 & & x_3 & \\ -3 & & 1 & & 4 & & -3 \\ 3 & & 3 & & 3 & & 3 \end{array}$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{-12} = \frac{x_2}{-9} = \frac{x_3}{21}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{4} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{-7}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

Case (iii): $\boldsymbol{\lambda = 1}$

$$1.x_1 - 3.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$3.x_1 + 0.x_2 + 3.x_3 = 0$$
$$-5x_1 + 2.x_2 - 5.x_3 = 0$$

$$1.x_1 - 3.x_2 + 1.x_3 = 0$$
$$3.x_1 + 0.x_2 + 3.x_3 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & & x_2 & & x_3 & \\ -3 & & 1 & & 1 & & -3 \\ 0 & & 3 & & 3 & & 0 \end{array}$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{-9} = \frac{x_2}{0} = \frac{x_3}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{-1} = \frac{x_2}{0} = \frac{x_3}{1}$$

∴ ஐகன் திசையென் $X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$