SEMESTER : II
CORE COURSE : IV

Inst Hour	: 4
Credit	: 4
Code	: 18K2M04

VECTOR ANALYSIS AND FOURIER SERIES

UNIT 1:

Vector differentiation – velocity & acceleration –Vector & scalar fields – Gradient of a vector– Directional derivative -Divergence & curl of vector solenoidal & irrotational vectors – Laplacian double operator – simple problems
(Chapter I and Chapter II of Text book 1)

UNIT 2:

Vector Integration – Line Integral – Conservative field – scalar potential– Work done by a force – Surface integral – Volume integral – simple problems.
(Chapter III of Text book 1)

UNIT 3:

Gauss Divergence Theorem –Simple problems &Verification of the theorem
(Chapter IV- 4.1- 4.2.3 of Text book 1)

UNIT 4:

Stoke's Theorem– Green's Theorem – Simple problems & Verification of the theorems
(Chapter IV- 4.3- 4.5 of Text book 1)

UNIT 5:

Fourier series – definition –Finding Fourier Series expansion of periodic functions with Period 2π and with period 2a – Use of odd & even functions in Fourier Series. Half range Fourier series – definition– Development in Cosine series & in Sine series
(Chapter 6 Sections 1- 5 of Text book 2)

Text Book(s)

[1] K.Viswanatham & S.Selvaraj, Vector Analysis, Emerald Publishers Reprint 1999

[2] T.K.M Pillai & others, Calculus Volume III, S.V Publications 2014

Books for Reference

[1] M.L.Khanna, Vector Calculus

[2] M.D.Raisinghania, Vector Calculus

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

10.2022

9/2/18

9.3.1
H.O.D.

அலகு - I

திசையன் வகையிடல்: (வெக்டர் வகையீடல்)

1) $\vec{A} = t^2\vec{i} - t\vec{j} + (2t+1)\vec{k}$ மற்றும் $\vec{B} = (2t-3)\vec{i} + \vec{j} - t\vec{k}$ எனில்

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})$ (ii) $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$ ஆகியவற்றின் மதிப்பை அறிக.

விடை:

$$\vec{A} = t^2\vec{i} - t\vec{j} + (2t+1)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = 2t\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$ மற்றும்

$$\vec{B} = (2t-3)\vec{i} + \vec{j} - t\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = 2\vec{i} - \vec{k}$$

(i) $$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$= (2t\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) + (2\vec{i} - \vec{k})$$

$$= 2(t+1)\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$t = 1$ எனில்,

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

(ii) $$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

$$= [t^2\vec{i} - t\vec{j} + (2t+1)\vec{k}]\times(2\vec{i} - \vec{k})$$
$$+ (2t\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})\times[(2t-3)\vec{i} + \vec{j} - t\vec{k}]$$

$t = 1$ எனில்

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})\times(2\vec{i} - \vec{k}) + (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})\times(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

$$= 7\vec{j} + 3\vec{k}$$

2. $r^2 = x^2+y^2+z^2$ எனில் grad r^n - ஐக் காண்க

<u>பதில்</u> :

$$\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\Rightarrow r^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \; ; \; \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \; ; \; \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\text{grad } r^n = \nabla r^n$$

$$= \vec{i}\frac{\partial r^n}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial r^n}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial r^n}{\partial z}$$

$$= \sum \vec{i}\, n r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= \sum \vec{i}\, n r^{n-1} \frac{x}{r}$$

$$= \sum \vec{i}\, n r^{n-2} x$$

$$= n r^{n-2} (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$= n r^{n-2}\vec{r}$$

3) $(1,2,0)$ இல், $\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ எனும் திசையில், $\phi = xy+yz+zx$ எனில் திசைவழித் தோன்றலைக் காண்க. மேலும் அதன் அதிகபட்ச மதிப்பைக் காண்க

<u>பதில்</u> :

$$\phi = xy+yz+zx$$

$$\nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$= (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

$(1,2,0)$ இல்

$$\nabla\phi = 2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

$\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ என்ற திசையில் ஓர் அலகு வெக்டர்

$$\hat{a} = \frac{\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}}$$

$= \frac{1}{3}(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{K})$

$\Rightarrow \nabla\phi\cdot\vec{a} = (2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{K})\cdot\frac{1}{3}(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{K})$

$= \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+2$

$= \frac{10}{3}$

மேலும் (1,2,0) வில் ϕ-இன் அதிகபட்ச திசைவழித்தோன்றல்

$= |\text{grad}\,\phi|$

$= |\nabla\phi|$

$= |2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{K}|$

$= \sqrt{14}$

4) $\vec{A} = 3y^4z^2\vec{i}+4x^3z^2\vec{j}-3x^2y^2\vec{K}$ என்பது சாலினாய்டல் எனக்காட்டு. $\vec{B} = (6xy+z^3)\vec{i}+(3x^2-z)\vec{j}+(3xz^2-y)\vec{K}$ என்பது சுழற்சியற்ற வெக்டர் எனக் காட்டு.

<u>பதில்</u> :

(a) div $\vec{A} = 0$ எனில், $\vec{A}$ என்பது சாலினாய்டல்

$\text{div}\,\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A}$

$= \frac{\partial}{\partial x}(3y^4z^2)+\frac{\partial}{\partial y}(4x^2z^2)+\frac{\partial}{\partial z}(-3x^2y^2)$

$= 0$

எனவே $\vec{A}$ என்பது சாலினாய்டல்

b) $\nabla\times\vec{B} = 0$ எனில் $\vec{B}$ என்பது சுழற்சியற்ற வெக்டர்

[அதாவது curl $\vec{B} = 0$]

$$\text{curl}\,\vec{B} = \nabla\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6xy+z^3) & (3x^2-z) & (3xz^2-y) \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2-y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2-z)\right]\vec{i} +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}(6xy+z^3) - \frac{\partial}{\partial x}(3xz^2-y)\right]\vec{j} +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy+z^3)\right]\vec{k}$$

$$= (-1+1)\vec{i} + (3z^2-3z^2)\vec{j} + (6x-6x)\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

எனவே $\vec{B}$ என்பது சுழற்சியற்ற வெக்டர்

5) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ எனில் $\nabla^2 r^n$ ஐக் காண்க. மேலும் $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$-ஐக் கண்டறிக

பதில் :

$$\nabla^2 r^n = \nabla\cdot(\nabla r^n)$$

$$= \nabla\cdot(n r^{n-2}\vec{r})$$

$$= n\nabla\cdot(r^{n-2}\vec{r})$$

$$= n\left[r^{n-2}\nabla\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot(\nabla r^{n-2})\right]$$

$$= n\left[3r^{n-2} + \vec{r}\cdot(n-2)r^{n-4}\vec{r}\right]$$

$$= n r^{n-2}\left[3+n-2\right]$$

$$= n(n+1)r^{n-2}$$

$$\therefore \nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

மேலும், $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla^2(r^{-1}) = 0 \quad [\because n = -1]$

6) $(1,4,-2)$ மற்றும் $(-3,-3,3)$ ஆகியவற்றில் $xy = z^2$ என்ற பரப்பின் செங்குத்துகளின் இடையே ஏற்படும் கோணங்களைக் கண்டறிக.

பதில்:

$$\phi = xy - z^2 = 0$$

$$\nabla\phi = \nabla(xy - z^2)$$

$$= y\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k}$$

$(1, 4, -2)$ வில் பரப்பின் செங்குத்து,

$$\nabla_1 \phi = 4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

$(-3, -3, 3)$ வில் பரப்பின் செங்குத்து,

$$\nabla_2 \phi = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$$

செங்குத்துகளின் இடையே ஏற்படும் கோணத்தை θ எனக் கொள்க,

$$\therefore \cos\theta = \frac{\nabla_1\phi}{|\nabla_1\phi|} \cdot \frac{\nabla_2\phi}{|\nabla_2\phi|}$$

$$= \frac{(4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k})}{\sqrt{16+1+16}\ \sqrt{9+9+36}}$$

$$= \frac{-39}{\sqrt{33}\ \sqrt{54}} = \frac{-13}{3\sqrt{22}}$$

செங்குத்துகளின் இடையே ஏற்படும் குறுங்கோணம்,

$$\cos^{-1}\left(\frac{13}{3\sqrt{22}}\right)$$

07) நிரூபி : $\nabla^2(r^n\vec{r}) = n(n+3)r^{n-2}\vec{r}$

பதில் $\nabla^2(r^n\vec{r}) = \nabla(\nabla \cdot r^n\vec{r})$

$$= \nabla\left[(\nabla r^n)\cdot\vec{r} + r^n(\nabla\cdot\vec{r})\right]$$

$$= \nabla\left[(n r^{n-2}\vec{r})\cdot\vec{r} + 3r^n\right]$$

$$= \nabla\left[n r^n + 3r^n\right]$$

$$= \nabla\left[(n+3)r^n\right]$$

$$= (n+3)\nabla r^n$$

$$= (n+3)\left[n r^{n-2}\vec{r}\right]$$

$$= n(n+3)r^{n-2}\vec{r}$$

வெக்டரின் தனித்துவங்கள் :

1. $\operatorname{div}(\phi \vec{F}) = \phi \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} \phi$

2. $\operatorname{curl}(\phi \vec{F}) = \phi \operatorname{curl} \vec{F} + (\operatorname{grad} \phi) \times \vec{F}$

3. $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\operatorname{curl} \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\operatorname{curl} \vec{B})$

4. $\operatorname{curl}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$

5. $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} \phi) = 0$

6. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{A}) = 0$

7. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

பயிற்சி வினாக்கள்:

1. $\phi(x, y, z) = 3x^2 y - y^3 z^3$ எனில், $(+1, -2, -1)$ என்ற புள்ளியில் $\operatorname{grad} \phi$ ஐக் காண்க

2. $\vec{A} = 2yz\vec{i} - x^2 y\vec{j} + xz^2 \vec{k}$ மற்றும் $\phi = x^2 y z^3$ எனில்
(i) $\operatorname{grad} \phi$ (ii) $\bar{A} \cdot \operatorname{grad} \phi$ (iii) $(\bar{A} \cdot \nabla)\phi$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\vec{r}}{r^2}$ எனக் காட்டு

4. $x^2 + 2y^3 + z^3$ என்ற பரப்பின் செங்குத்தான ஓர் அலகு வெக்டரை $(1, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் காண்க

5. $\phi = x^2 yz + 4xz^2$ இன் திசைவழித்தோன்றலை $(1, -2, -1)$ என்ற புள்ளியில், $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ என்ற திசையில் காண்க.

—x—

அலகு - 2

திசையன்களின் ஒருங்கிணைப்பு

வரி ஒருங்கிணைப்பு :

1) $\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$ எனில், $(0,0,0)$ முதல் $(1,1,1)$ வரை C என்ற பாதையோடு செல்லும் x, y, z இன் மதிப்புகள் $x=t;\ y=t^2;\ z=t^3$ எனில் $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ ஐ மதிப்பிடுக.

பதில் :

$$\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$$

பாதை C இன் அளவுரு சமன்பாடு

$$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3 \Rightarrow dx=dt,\ dy=2t\,dt;\ dz=3t^2$$

மற்றும் $t=0$ முதல் $t=1$ வரை

$$\therefore \int \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C (3x^2+6y)dx - (14yz)dy + (20xz^2)dz$$

$$= \int_C \left[(3x^2+6y)\frac{dx}{dt} - (14yz)\frac{dy}{dt} + (20xz^2)\frac{dz}{dt}\right]$$

$$= \int_0^1 \left[(3t^2+6t^2)1 - (14t^5)2t + (20t^7)3t^2\right]dt$$

$$= -\int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt$$

$$= \left[3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\right]_0^1$$

$$= 5$$

2) $\vec{F} = yz\vec{i} + 2y\vec{j} - x^2\vec{k}$ எனில் $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ இன் மதிப்பைக் காண்க. C ஆனது $O(0,0,0)$ முதல் $A(0,0,1)$ வரை நேர்க்கோட்டுப் பகுதியை உள்ளடக்கியது ; A முதல் $B(0,-3,1)$ மற்றும் B முதல் $P(2,-3,1)$ வரை.

பதில்,

$$\vec{F} = yz\vec{i} + 2y\vec{j} - x^2\vec{k} \; ; \; d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{OA} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{AB} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{BP} \vec{F}\cdot d\vec{r} \rightarrow (1)$$

OA என்ற கோடு, $(0,0,0)$ மற்றும் $(0,0,1)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் போது,

$$x = y = 0 \; ; \; dx = dy = 0$$

$$\therefore \vec{F} = 0 \text{ மற்றும் } d\vec{r} = dz\,\vec{k}$$

$$\therefore \int_{OA} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

AB என்ற கோடு, $(0,0,1)$ மற்றும் $(0,-3,1)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் போது,

$$x = 0, \; z = 1 \; ; \; dx = 0 = dz$$

$$\therefore \vec{F} = y\vec{i} + 2y\vec{j} \text{ மற்றும் } d\vec{r} = dy\,\vec{j}$$

$$\therefore \int_{AB} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{-3} (2y)\,dy$$

$$= \left[y^2\right]_0^{-3} = 9$$

BP என்ற கோடு, $(0,-3,1)$ மற்றும் $(2,-3,1)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் போது,

$$y = -3, \; z = 1 \; ; \; dy = 0 = dz$$

$$\vec{F} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - x^2\vec{k} \text{ மற்றும் } d\vec{r} = dx\,\vec{i}$$

$$\int_{BP} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 (-3)\,dx = \left[-3x\right]_0^2 = -6$$

எனவே $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 + 9 - 6$

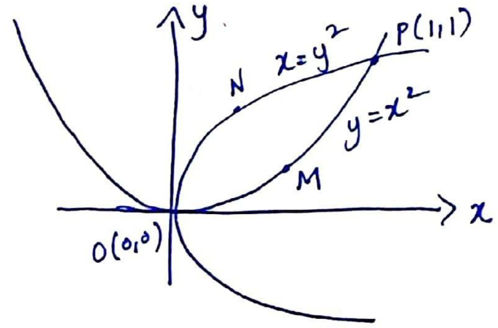
$= 3$ [(1) இல் இருந்து]

3) $\vec{A} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ எனில், C என்ற மூடிய வளைவின் சமன்பாடுகள் $y = x^2$ and $x = y^2$. $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ ஐ மதிப்பிடுக.

பதில்:

$y = x^2$ and $x = y^2$ ஆகியன $O(0,0)$ என்ற ஆரம்பப் புள்ளியில் வெட்டும் மற்றும் $P(1,1)$ என்ற புள்ளியிலும் வெட்டும். இதனால் C என்ற மூடிய வளைவு உருவாகும்.

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{OMP} \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_{PNO} \vec{A}\cdot d\vec{r}$$



OMP உடன்,

$y = x^2$, $dy = 2x\,dx$ வரைவு : $x = 0$ முதல் 1 வரை

$$\therefore \vec{A} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$$
$$= (x-x^2)\vec{i} + (x+x^2)\vec{j}$$

$$d\vec{r} = \cancel{dx}\; dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$$
$$= dx\,\vec{i} + 2x\,dx\,\vec{j}$$

$$\int_{OMP} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{x=0}^{x=1} \left[(x-x^2)\,dx + (x+x^2)\,2x\,dx\right]$$

$$= \int_0^1 (x + x^2 + 2x^3)\,dx$$

$$= \frac{4}{3}$$

PNO - உடன்

$x = y^2$, $dx = 2y\,dy$ வரைவு : $y = 1$ முதல் $y = 0$ வரை

$\therefore \vec{A} = (y^2 - y)\vec{i} + (y^2 + y)\vec{j}$

$d\vec{r} = 2y\,dy\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ [PNO ல்]

$$\int_{PNO} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{y=1}^{y=0} \left[(y^2 - y)2y\,dy + (y^2+y)\,dy\right]$$

$$= \int_1^0 (y - y^2 + 2y^3)\,dy$$

$$= -\frac{2}{3}$$

எனவே $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

மேற்பரப்பு தொகையீடு

(1) $\vec{A} = (x+y^2)\vec{i} - 2x\vec{j} + 2yz\vec{k}$ எனில் $\iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,ds$ ஐ மதிப்பிடுக மற்றும் S என்பது $2x+y+2z=6$ என்ற சமதளப்பரப்பின் மேற்பரப்பு [முதல் ஆக்டன்ட்]

பதில் :

கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பு $2x+y+2z=6$

$\nabla(2x+y+2z) = 2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

(ie) $\vec{n} = 2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$$

S இன் ஆர்த்தோகோனல் திட்டத்தை xy சமதளப்பரப்பில் கருது.
xy சமதள பரப்பின் ஓர் அலகு செங்குத்து வெக்டர்

$$\hat{n}\cdot\vec{k} = \frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\cdot\vec{k} = \frac{2}{3}$$

$$\vec{A}\cdot\hat{n} = \left[(x+y^2)\vec{i} - 2x\vec{j} + 2yz\vec{k}\right]\cdot\frac{1}{3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x+y^2) - x + 2yz\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x+y^2) - x + y(6-2x-y)\right] \quad \boxed{\because 2z = 6-2x-y}$$

$$= \frac{4}{3}(3-x)y$$

$$\therefore \iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\, ds = \iint_R \vec{A}\cdot\hat{n}\, \frac{dx\,dy}{|\hat{n}\cdot\vec{k}|}$$

$$= \iint_R \frac{4}{3}(3-x)y\, \frac{dx\,dy}{(2/3)}$$

$$= 2\iint_R (3-x)y\, dx\, dy$$

$$= 2\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{6-2x} (3-x)y\, dx\, dy$$

$$= 2\int_{x=0}^{3} (3-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{6-2x} dx$$

$$= 2\int_{0}^{3} (3-x)\frac{(6-2x)^2}{2}\, dx$$

$$= 4\int_{0}^{3} (3-x)^3\, dx$$

$$= -4\left[\frac{(3-x)^4}{4}\right]_0^3$$

$$= 81$$

III) தொகுதி ஒருங்கிணைப்பு :

1. $\vec{F} = xy\vec{i} - zx\vec{j} + \vec{k}$ எனில் V என்பது கோளத்தின் ஆக்டண்ட் எனில் [கோளம் : $x^2+y^2+z^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$] $\cdot \int_V \vec{F}\, dv$ ஐ மதிப்பிடுக

பதில் :

$$\int_V (xy\vec{i} - zx\vec{j} + \vec{k})\, dv$$

$$= \vec{i}\int_V xy\, dv - \vec{j}\int_V zx\, dv + \vec{k}\int_V dv \rightarrow (1)$$

$\int_V xy\, dv = \iiint_V xy\, dx\, dy\, dz$ எனக் கருது

$$= \int_{z=0}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} xy \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_{z=0}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y^2-z^2}} y \, dy \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_{z=0}^{2} dz \int_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}} y(4-y^2-z^2) \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{z=0}^{2} \left[- \frac{(4-y^2-z^2)^2}{4} \right]_{y=0}^{\sqrt{4-z^2}} dz$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^2 (4-z^2)^2 \, dz = \frac{32}{15}$$

சமச்சீரின் படி,

$$\int_V z x \, dv = \frac{32}{15}$$

$$\int_V dv = V \qquad V = \text{கோளத்தின் கொள்ளளவு}$$

$$x^2+y^2+z^2=4 \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

$$= \frac{1}{8} \times V$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi (2^3)$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

$$① \Rightarrow \int_V \vec{F} \, dv = \frac{32}{15} \vec{i} - \frac{32}{15} \vec{j} + \frac{4}{3} \pi \vec{k}$$

2) $\vec{A} = 2x^2y\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + 4xz^2\,\vec{k}$ எனில், V என்பது முதல் கால்பகுதியில் (ஆக்டன்டில்) ஒரு பகுதி, சிலிண்டரால் சூழப்பட்டது, சிலிண்டரானது $y^2+z^2=9$ மற்றும் $x=2$. $\int_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV$ ஐ மதிப்பிடுக.

பதில்:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A}$$

$$= \nabla\cdot\left(2x^2y\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + 4xz^2\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(4xz^2)$$

$$= 4xy - 2y + 8xz$$

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A}\,dv = \iiint_V (4xy - 2y + 8xz)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{z=0}^{3}\int_{y=0}^{\sqrt{9-z^2}} (4xy - 2y + 8xz)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{z=0}^{3} dx\,dz\left[2xy^2 - y^2 + 8xzy\right]_{y=0}^{\sqrt{9-z^2}}$$

$$= \int_{x=0}^{2} dx \int_{z=0}^{3}\left[(2x-1)(9-z^2) + 8xz\sqrt{9-z^2}\right]dz$$

$$= \int_{x=0}^{2}\left[(2x-1)\left(9z - \frac{z^2}{3}\right) - \frac{8x}{3}(9-z^2)^{3/2}\right]_{z=0}^{3} dx$$

$$= \int_0^2 18(6x-1)\,dx$$

$$= 180.$$

பயிற்சி வினாக்கள்:

1. $\int_0^{\pi/2} (3\sin x\,\vec{i} + 2\cos x\,\vec{j})\,dx$ ஐ மதிப்பிடுக

2. $\vec{F}(t) = (3t^2 - t)\vec{i} + (2-6t)\vec{j} - 4t\,\vec{k}$ எனில்,
$\int_2^4 \vec{F}(t)\,dt = 50\vec{i} - 32\vec{j} - 24\vec{k}$ எனக் காட்டு

3. $\vec{A} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ ஆகிய எனில், $\iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{12}{5}\pi R^5$ எனக் காட்டு, S - கோளத்தின் மேற்பரப்பு, ஆரம் R மற்றும் ஆரம்பப் புள்ளி 0.

— x —

அலகு - III

அலகு - 3

ஒருங்கிணைந்த தேற்றங்கள்

1. காஸ் பாய்வு தேற்றம் :

இது திசையன் செயல்பாட்டின் மேற்பரப்பு ஒருங்கிணைப்பை திசையன் செயல்பாட்டின் தொகுதி ஒருங்கிணைப்பின் பாய்வோடு இணைக்கிறது

2. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் :

இது திசையன் செயல்பாட்டின் வரி ஒருங்கிணைப்பை திசையன் செயல்பாட்டின், மேற்பரப்பு ஒருங்கிணைப்பின் சுருளோடு இணைக்கிறது.

3. கிரீன்ஸ் தேற்றம் :

இது ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தின் குறிப்பிட்ட பகுதி. இதில் மேற்பரப்பு என்பது சமதள பரப்பாக இருக்கும். இது இரட்டை ஒருங்கிணைப்பையும், வரி ஒருங்கிணைப்பையும் இணைக்கிறது. இந்த பகுதியானது மூடிய வளைவால் சூழப்பட்டது.

காஸ் பாய்வு :

$$\iint_S \vec{F}\, d\vec{s} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dv$$

(or)

$$\iint_S (F_1\, dy\, dz + F_2\, dz\, dx + F_3\, dx\, dy)$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

1) பாய்வு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $\iint_S (ax\vec{i}+by\vec{j}+cz\vec{k})\cdot\hat{n}\,ds = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$, S என்பது $x^2+y^2+z^2=1$ என்ற கோளத்தின் மேற்பரப்பு.

பதில்:

$$\vec{F} = ax\vec{i}+by\vec{j}+cz\vec{k}$$

$$\text{div}\,\vec{F} = a+b+c$$

$$\iint_S (ax\vec{i}+by\vec{j}+cz\vec{k})\cdot\hat{n}\,ds = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$$

$$= \iiint_V \text{div}\,\vec{F}\,dv$$

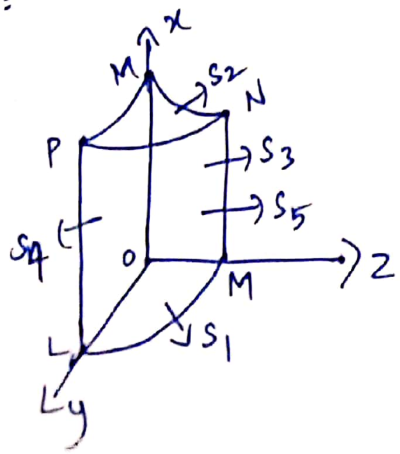
$$= \iiint_V (a+b+c)\,dv$$

$= (a+b+c)V$ [V என்பது S இன் கொள்ளளவு]

$$= \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$$

2) காஸ் பாய்வு தேற்றத்தின் கூற்றினை விளக்குக மற்றும் நிரூபிக்க, $\vec{A} = 2x^2y\vec{i} - y^2\vec{j} + 4xz^2\vec{k}$ எனில் என்பது $y^2+z^2=9$ என்ற சிலிண்டரை உள்ளடக்கியது எனில், சமதளங்கள் $x=0, x=2, y=0, z=0$ முதல் ஆக்டண்டில் உள்ளது.

பதில்:



1. சமதள முகம் OLM (வட்டத்தின் நான்கில் ஒரு பங்கு (வட்டம் : $y^2+z^2=9$) $x=0$ என்ற சமதளத்தில் S_1 என குறிக்கப்படுகிறது.

2. சமதள முகம் HPN ($y^2+z^2=9$ என்ற வட்டத்தில் நான்கில் ஒரு பங்கு) $x=2$ என்ற சமதளத்தில் S_2 என குறிக்கப்படுகிறது.

3. சமதள முகம் OMNH, ~~xe~~ $y=0$ என்ற சமதளத்தில் S_3 என குறிக்கப்படுகிறது.

4. சமதள முகம் HPLO, $z=0$ என்ற சமதளத்தில் S_4 என குறிக்கப்படுகிறது.

5. வளைவு மேற்பரப்பு PLMN என்பது முதல் ஆக்டன்டில் உள்ளது இதனை மேற்பரப்பு ஒருங்கிணைப்பு எனலாம்.

$$\cancel{\iiint}$$

$$\iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{S_1} \vec{A}\cdot\hat{n}_1\,ds_1 + \iint_{S_2} \vec{A}\cdot\hat{n}_2\cdot ds_2 + \iint_{S_3} \vec{A}\cdot\hat{n}\cdot ds_3 + \iint_{S_4} \vec{A}\cdot\hat{n}_4\cdot ds_4 + \iint_{S_5} \vec{A}\cdot\hat{n}_5\,ds_5 \longrightarrow (1)$$

$$\vec{A} = 2x^2y\,\vec{i} - y^2\vec{j} + 4xz^2\vec{k}$$

For S_1, $x=0 \Rightarrow \vec{A} = -y^2\vec{j}$ ~~a~~ மற்றும் $\hat{n}_1 = -\vec{i}$

$$\therefore \iint_{S_1} \vec{A}\cdot\hat{n}_1\,ds_1 = \iint_{S_1} (-y^2\vec{j})(-\vec{i})\,ds_1 = 0$$

S_2, $x=2 \Rightarrow \vec{A} = 8y\,\vec{i} - y^2\vec{j} + 8z^2\vec{k}$ ~~an~~ மற்றும் $\hat{n}_2 = \vec{i}$

$$\therefore \iint_{S_2} \vec{A}\cdot\hat{n}_2\,ds_2 = \iint_{S_2} (8y\vec{i} - y^2\vec{j} + 8z^2\vec{k})\,\vec{i}\cdot ds_2$$

$$= \iint_{S_2} 8y\,ds_2 = \iint_{S_2} 8y\,dy\,dz$$

$$= \int_{y=0}^{3} \int_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} 8y \, dy \, dz$$

$$= \int_{y=0}^{3} 8y \sqrt{9-y^2} \, dy$$

$$= -4 \int_{y=0}^{3} \sqrt{9-y^2} \, d(9-y^2)$$

$$= -\frac{8}{3} \left[(9-y^2)^{3/2} \right]_0^3$$

$$= 72$$

$S_3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \vec{A} = 4xz^2\vec{k}$ மற்றும் $\hat{n}_3 = -\vec{j}$

$$\therefore \iint_{S_3} \vec{A} \cdot \hat{n}_3 \, ds_3 = \iint_{S_3} (4xz^2\vec{k}) \cdot (-j) \, ds_3 = 0$$

$S_4 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \vec{A} = 2x^2y\vec{i} - y^2\vec{j}$ மற்றும் $\hat{n}_4 = -\vec{k}$

$$\therefore \iint_{S_4} \vec{A} \cdot \hat{n}_4 \, ds_4 = \iint_{S_4} (2x^4y\vec{i} - y^2\vec{j}) \cdot (-\vec{k}) \, ds_4 = 0$$

S_5, $\hat{n}_5 = \dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$. [ϕ என்பது $y^2 + z^2 = 9$ என்ற மேற்பரப்பு]

$$\hat{n}_5 = \frac{2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{4y^2 + 4z^2} = \frac{2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{36}}$$

$$= \frac{1}{3}(y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\therefore \iint_{S_5} \vec{A} \cdot \hat{n}_5 \cdot ds_5 = \iint_{S_5} (2x^2y\vec{i} - y^2\vec{j} + 4xz^2\vec{k}) \times \frac{1}{3}(y\vec{j} + z\vec{k}) \, ds_5$$

$$= \iint_{S_5} \frac{1}{3}(4xz^3 - y^3) \, ds_5$$

$y = 3\cos\theta$, $z = 3\sin\theta$ எனக் கொள்க

$\Rightarrow ds_5 = 3\,d\theta\,dx$, θ என்பது 0 வில் இருந்து $\frac{\pi}{2}$ ஆக மாறும்

x என்பது 0 விலிருந்து 2 ஆக மாறும், இதனால்

முகு மேற்பரப்பு S_5 என்பது மூடப்பட்டது.

$$\therefore \iint_{S_5} \vec{A}\cdot\hat{n}_5\,ds_5 = \int_{x=0}^{2}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{3}\left[4x(3\sin\theta)^3 - (3\cos\theta)^3\right] 3\,dx\,d\theta$$

$$= \int_{x=0}^{2} 4x\,dx \int_{\theta=0}^{\pi/2} 27\sin^3\theta\,d\theta - \int_{x=0}^{2} dx \int_{\theta=0}^{\pi/2} 27\cos^3\theta\,d\theta$$

$$= 2\times4\times27\times\frac{2}{3} - 2\times27\times\frac{2}{3}$$

$$= 108$$

$$\therefore \iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,ds = 0+72+0+0+108$$

$$= 180$$

<u>தொகுதி ஒருங்கிணைப்பு</u>:

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV = \iiint_V \nabla\cdot\left(2x^2y\,\vec{i} - y^2\vec{j} + 4xz^2\vec{k}\right)dV$$

$$= \iiint_V (4xy - 2y + 8xz)\,dx\,dy\,dz$$

V என்பது மூடப்பட்டது. x என்பது 0 விலிருந்து 3 ஆகவும்,

z என்பது 0 விலிருந்து $\sqrt{9-y^2}$ ஆகவும் மாறும்

$\therefore$ தொகுதி ஒருங்கிணைப்பு

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{3}\int_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} (4xy - 2y + 8xz)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{3} \left[4xyz - 2yz + 4xz^2 \right]_{z=0}$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{3} \left[2y(2x-1)\sqrt{9-y^2} + 4x(9-y^2) \right] dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left[-\frac{2}{3}(2x-1)(9-y^2)^{3/2} + 4x\left(9y - \frac{y^3}{3}\right) \right]_{y=0}^{3} dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left[18(2x-1) + 72x \right] dx$$

$$= \int_{0}^{2} (108x - 18)\, dx$$

$$= \left[108\frac{x^2}{2} - 18x \right]_0^2$$

$$= \left[108 \times 2 - 18 \times 2 \right]$$

$$= 180$$

II. <u>கிரீன்ஸ்</u> <u>தேற்றம்</u> :

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

இங்கு C - எளிய மூடிய வளைவரை.

R - கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் உள்ள பகுதி

<u>வினா : 1</u> கிரீன்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\oint_C [y(2xy-1)dx + x(2xy+1)dy]$ - ன் மதிப்பை காண்க. இங்கு C - என்பது $x^2+y^2=1$.

தீர்வு:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

இப்பொழுது,

$$P = y(2xy-1) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy-1$$

$$\& \quad Q = x(2xy+1) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy+1$$

$$\therefore \oint_C y(2xy-1)\,dx + x(2xy+1)\,dy$$

$$= \iint_R [(4xy+1) - (4xy-1)]\,dx\,dy$$

$$= \iint_R 2\,dx\,dy = 2\iint_R dx\,dy$$

$= 2$ (R-ன் பரப்பளவு) $\quad \because R \to x^2+y^2=1$

$$= 2\pi$$

III ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம்:

$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{F})\cdot \hat{n}\,ds$$

dx

ன்பது

வினா : 2 $\bar{F} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ என்ற வெக்டர் புலத்திற்கு, S என்பது ஓரலகு ஆரமுள்ள கோளத்தின் மேல்பகுதியின் அரைப்பகுதி மற்றும் C என்பது எல்லையாகவும் அமைந்தால் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார்.

தீர்வு:

C என்பது $x^2+y^2=1$, $z=0$.

இப்போது, $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = (y\bar{i}+z\bar{j}+x\bar{k})\cdot(dx\bar{i}+dy\bar{j}+dz\bar{k})$$

$$= y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

$$\therefore \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

$$= \oint_C y\,dx, \quad \because z=0 \ \& \ dz=0$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d(\cos\theta)$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= -\pi$$

மேலும், $\text{curl } \bar{F} = \nabla \times (y\bar{i}+z\bar{j}+x\bar{k})$

$$= -\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$$

$$\therefore \iint_S (\nabla\times\bar{F})\cdot\hat{n}\,ds = \iint_{S_1}(-\bar{i}-\bar{j}-\bar{k})\cdot\bar{k}\,ds_1$$

$$= \iint_{S_1}(-1)\,ds_1 = -S_1$$

இங்கு S_1 என்பது $z=0$ என்ற தளத்தில் வட்டம் C-ஆல் அடைபட்ட பகுதியின் பரப்பளவு ஆகும்.

ஆனால், வட்டம் $x^2+y^2=1$-ன் பரப்பளவு π ஆகும்.

$$\therefore \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\text{curl}\,\bar{F})\cdot \hat{n}\, ds.$$

ஆகையால் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

பயிற்சி வினாக்கள்!

1. $\bar{F} = 4xz\,\bar{i} - y^2\bar{j} + yz\,\bar{k}$ என்ற வெக்டருக்கு $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ ஆகியவற்றால் அடைக்கப்பட்ட கனசதுரத்தின் மீது காஸின் பாய்வுத் தேற்றத்தை சரிபார்.

2. $\bar{F} = (x^2-y^2)\,\bar{i} + 2xy\,\bar{j}$ என்ற வெக்டர் புலத்திற்கு, XOY-ல் $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ ஆகிய நேர்கோடுகளால் மூடப்பட்ட செவ்வக பரப்பில் ஸ்டோக்ஸ்-ன் தேற்றத்தை சரிபார்.

3. C என்பது $(0,0)$, $(0,\frac{\pi}{2})$, $(\pi,\frac{\pi}{2})$, $(\pi,0)$ ஆகிய முனைகளைக் கொண்ட செவ்வகம் எனில், கிரீன்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\int_C e^{-x}(\sin y\,dx + \cos y\,dy)$ மதிப்பை காண்க.