SEMESTER : III & IV
CORE COURSE : VI

Inst Hour	: 4 + (2)
Credit	: 5
Code	: 18K4M06

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND TRANSFORMS

UNIT I

First order, higher degree differential equations solvable for x, solvable for y, solvablefor dy/dx, Clairaut's form – Conditions of integrability of $M\,dx + N\,dy = 0$ – simple problems.
(Chapter IV – Sections 1,2 & 3, Chapter II – Section 6 of Text Book 1)

UNIT II

Particular integrals of second order differential equations with constant coefficients -Linear equations with variable coefficients – Method of Variation of Parameters (Omit third & higher order equations).
(Chapter V – Sections 1,2,3,4 & 5, Chapter VIII – Section 4 of Text Book 1)

UNIT III

Formation of Partial Differential Equation – General, Particular & Complete integrals – Solution of PDE of the standard forms - Lagrange's method - Few standard forms - Solving of Charpit's method.
(Chapter XII – Sections 1 – 6 of Text Book 1)

UNIT IV

PDE of second order homogeneous equation with Constant coefficients – Particular Integrals of the forms e^{ax+by}, Sin(ax+by), Cos(ax+by), $x^r y^s$ and $e^{ax+by} f(x,y)$.
(Chapter V of Text Book 2)

UNIT V

Laplace Transforms – Standard formulae – Basic theorems & simple applications – Inverse Laplace Transforms – Use of Laplace Transforms in solving ODE with constant coefficients.
(Chapter IX – Sections 1 – 8 of Text Book 1)

Text Book(s)

[1]. T.K.Manicavachagom Pillay & S.Narayanan, Differential Equations, S.Viswanathan Publishers Pvt. Ltd., 2011.
[2]. Arumugam & Isaac, Differential Equations, New Gamma Publishing House, Palayamkottai, 2014.

Book forReference

[1]. M.D.Raisinghania , Ordinary and Partial Differential Equations, S.Chand & Co
[2]. M.K. Venkatraman, Engineering Mathematics, S.V. Publications, 1985 Revised Edition

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

9.3.18
HOD

9/3/18

UNIT - 1

1. தீர்க்க! $x^2p^2+3xyp+2y^2=0$.

தீர்வு:-

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு p-ல் ஒரு இருபடி சமன்பாடு ஆகும்.

$$p = \frac{-3xy \pm \sqrt{9x^2y^2-8x^2y^2}}{2x^2}$$

$$= \frac{-3xy \pm \sqrt{x^2y^2}}{2x^2}$$

$$= \frac{-3xy \pm xy}{2x^2}$$

$$= \frac{-3xy+xy}{2x^2} \quad (or) \quad \frac{-3xy-xy}{2x^2}$$

i.e) $p=-y/x$ (or) $p=-2y/x$.

i.e) $\frac{dy}{dx}=-y/x$ and $\frac{dy}{dx}=-2y/x$.

i.e) $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ and $\frac{dy}{y}=-2\frac{dx}{x}$ (மாறிகளை பிரிக்கிறோம்)

தொகையிட கிடைப்பது,

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x} \quad and \quad \int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dx}{x}$$

i.e) $\log y + \log x = \log c_1$ and $\log y + 2\log x = \log c_2$

i.e) $xy=c_1$ and $x^2y=c_2$

i.e) $xy-c=0$ and $x^2y-c=0$

முழுமையான தீர்வு $(xy-c)(x^2y-c)=0$.

2. தீர்க்க : $y = (x-a)p - p^2$.

தீர்வு :-

கொடுக்கப்பட்ட $y = xp - ap - p^2$

இது கிளைராட் வகை ஆகும். எனவே பொதுவான தீர்வு

$$y = cx - ac - c^2$$

$$y = c(x-a) - c^2 \rightarrow (1)$$

சிறப்பு ஒருங்கிணைப்பை கண்டுபிடிக்க.

படி : 1 பொதுவான தீர்வு $y = c(x-a) - c^2$.

படி : 2 சமன்பாடு (1)-ஐ c-யை பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது,

$$0 = (x-a) - 2c$$

$$c = \frac{(x-a)}{2} \rightarrow (2)$$

சமன்பாடு (2)ஐ (1)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$y = \left(\frac{x-a}{2}\right)(x-a) - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{(x-a)}{4}\right)^2$$

$$4y = (x-a)^2$$

இது ஒரு சிறப்பு ஒருங்கிணைப்பு ஆகும்.

3. தீர்க்க : $y = 2px + y^2p^3$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு கிளைராட்ஸ் வகை அல்ல ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை பின்வரும் வழியில் உண்மையில் ஒரு கிளைராட்ஸ் வடிவத்திற்கு குறைக்கலாம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை y-ஆல் பெருக்க கிடைப்பது,

$$y^2 = 2pyx + y^3p^3 \to (1)$$

$$y^2 = u \to (2)$$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\therefore 2yp = \frac{du}{dx} \to (3)$$

சமன்பாடு (2) மற்றும் (3) ஐ (1)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$u = x\frac{du}{dx} + \left(\frac{1}{2}\frac{du}{dx}\right)^3$$

$$u = xP_1 + \frac{1}{8}P_1^3 \to (4)$$

இங்கு $P_1 = \frac{du}{dx}$. சமன்பாடு (4)-ல் கிளைரோவின் u மற்றும் x.

$\therefore$ எனவே பொதுத்தீர்வு (4) [P_1 க்கு பதிலாக c]

$$u = xc + c^3$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு

$y^2 = cx + c^3$ [$\because u = y^2$]

சிறப்புத்தீர்வு காண,

படி :1 பொதுத்தீர்வு $y^2 = cx + c^3 \to (5)$

படி :2 மேலே உள்ள சமன்பாட்டை c-யைப் பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது

$$0 = x + 3c^2 \to (6)$$

படி :3 சமன்பாடு (5) மற்றும் (6)-ல் c-யை அகற்ற கிடைப்பது $c^2 = -\frac{x}{3} \to (7)$

சமன்பாடு (5) -ஐ வர்க்கப்படுத்த

$$y^4 = c^2x^2 + c^6 + 2c^4x \rightarrow (8)$$

சமன்பாடு (7) ஐ (8) -ல் பிரதியிட

$$y^4 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{27} + 2\cdot\frac{x^2}{9}\cdot x$$

$$= \frac{-9x^3 - x^3 + 6x^3}{27}$$

$$= \frac{4x^3}{27}$$

$$\therefore 27y^4 = 4x^3.$$

இதுவே தேவை தனிச்சிறப்புத் தீர்வு. மேலும் முறையின் பொதுத்தீர்வு $y^2 = cx + c^3$.

4. தீர்க்க: $(a^2 - 2xy - y^2)\,dx - (x+y)^2\,dy = 0.$

தீர்வு:

$$u = \int M\,dx + \int\left\{N - \int \frac{\delta M}{\delta y}\,dx\right\}dy + c$$

$$M\,dx + N\,dy = du.$$

$$M = a^2 - 2xy - y^2 \;;\quad N = -(x+y)^2$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = -2x - 2y \;;\quad \frac{\delta N}{\delta x} = -2(x+y)$$

$$\therefore \frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}.$$

$$\int \frac{\delta M}{\delta y}\,dx = \int(-2x-2y)\,dx$$

$$= -2\int(x+y)\,dx$$

$$= -2\left[\frac{x^2}{2} + xy\right]$$

$$\int \frac{\delta M}{\delta y}\, dx = -x^2 - 2xy.$$

$$N - \int \frac{\delta M}{\delta y}\, dx = -(x+y)^2 - (-x^2 - 2xy)$$

$$= -(x^2 + y^2 + 2xy) + x^2 + 2xy$$

$$= -x^2 - y^2 - 2xy + x^2 + 2xy$$

$$= -y^2.$$

$$u = \int M dx + \int \left\{ N - \int \frac{\delta M}{\delta y}\, dx \right\} dy + c.$$

$$= \left\{ \int (a^2 - 2xy - y^2)\, dx + \int -y^2\, dy + c \right\} = 0$$

$$xa^2 - \frac{2x^2y}{2} - xy^2 - y^3/3 = c.$$

$$xa^2 - x^2y - xy^2 - y^3/3 = c$$

5. தீர்க்க : $(y^2 + 2x^2y)\, dx + (2x^3 - xy)\, dy = 0.$

தீர்வு : $(y^2 + 2x^2y)\, dx + (2x^3 - xy)\, dy = 0 \longrightarrow (1)$

$M = y^2 + 2x^2y \qquad N = 2x^3 - xy$

$M_y = 2y + 2x^2 \qquad N_x = 6x^2 - y.$

$M_y \neq N_x.$

x, $x^m y^n$ காரணியால் (1)-ல் பெருக்க,

$$(x^m y^{n+2} + 2x^{m+2} y^{n+1})\, dx + (2x^{m+3} y^n - x^{m+1} y^{n+1})\, dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ என எடுத்துக்கொள்க.

$$M = x^m y^{n+2} + 2x^{m+2} y^{n+1}$$

$$N = 2x^{m+3} y^n - x^{m+1} y^{n+1}$$

$Nx = 2(m+3)x^{m+2}y^n - (m+1)x^m y^{n+1}$

$[(n+2)y + 2(n+2)x^2 - 2(m+3)x^2 + (m+1)y] = 0.$

$[(n+2+m+1)y + 2(n+1-m-3)x^2]\, x^m y^n = 0.$

$\therefore x^m y^n \neq 0.$

$(n+m+3)y + 2(n-m-2)x^2 = 0.$

(ie) $(n+m+3) = 0$ மற்றும் $2(n-m-2) = 0.$

$\Rightarrow (a+b),\quad 2n = -1$

$n = -1/2.$

(ie) $2m = 5, \quad m = -5/2.$

தொகையீடல் $x^{5/2}, y^{-1/2}.$

பெருக்கப்பட்ட சமன்பாடு இப்படி

$(x^{-5/2}, y^{3/2} + 2n^{-1/2})\, dx + (2x^{1/2}y^{-1/2} - x^{3/2}y^{1/2})\, dy$

6. தீர்க்க :- $(y^2e^x + 2xy)\, dx - x^2 dy = 0.$

தீர்வு :- $(y^2e^x + 2xy)\, dx - x^2 dy = 0$

வகுக்க y^2.

$$\frac{y^2e^x\, dx + 2xy\, dx - x^2 dy}{y^2} = 0$$

$$e^x dx + \frac{2xy\, dx - x^2 dy}{y^2} = 0$$

$$\left(e^x + \frac{2x}{y}\right) dx - x^2/y^2\, dy = 0.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$\therefore$ தீர்வு $\int \left(e^x + \frac{2x}{y}\right) dx = 0.$

(N-லிருந்து சாராதவைகளை எந்த உறுப்புகளும் இல்லை மற்றும் y-ஐ ஒரு மாறிலியாக கொள்கிறோம்).

$$\therefore \quad e^x + \frac{x^2}{y} = c.$$

7. தீர்க்க! $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0.$

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு துல்லியமாக இல்லை. சமன்பாடு ஒருபடித்தானதாக இருப்பதால் தொகையீட்டுக் காரணி $\frac{1}{Mx+Ny}$.

தொகையீட்டுக் காரணி $= \frac{1}{Mx+Ny}.$

$$= \frac{1}{x(x^2y - 2xy^2) + y(3x^2y - x^3)}$$

$$= \frac{1}{x^2y^2}.$$

பெருக்க கிடைப்பது,

$$\frac{x^2y - 2xy^2}{x^2y^2}\, dx - \frac{x^3 - 3x^2y}{x^2y^2}\, dy = 0.$$

$$\left(\frac{x^2y}{x^2y^2} - \frac{2xy^2}{x^2y^2}\right) dx + \left(\frac{3x^2y}{x^2y^2} - \frac{x^3}{x^2y^2}\right) dy = 0.$$

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0.$$

REDMI NOTE 9

$$\therefore \frac{dx}{y} - 2\frac{dx}{x} + 3\frac{dy}{y} - \frac{x}{y^2}dy = 0.$$

$$\frac{x}{y} - 2\log x + 3\log y = c.$$

$$(\text{i.e}) \quad \log\frac{y^3}{x^2} + \frac{x}{y} = c.$$

8. தீர்க்க!- $(y - 3x^2)dx - x(1 - xy^2)dy = 0.$

தீர்வு!-

$$y\,dx - x\,dy - 3x^2 dx + x^2y^2 dy = 0.$$

$\div x^2$, கிடைப்பது

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} - 3dx + y^2 dy = 0.$$

$$(\text{i.e}) \quad -d(y/x) - d(3x) + \tfrac{1}{3}d(y^3) = 0.$$

$$\therefore -y/x - 3x + \tfrac{1}{3}y^3 = c.$$

9. தீர்க்க! $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2+y^2-2y}$

தீர்வு!

$$(x^2+y^2)dy = 2y\,dy + 2x\,dx$$

$$(\text{i.e}) \quad dy = \frac{d(y^2+x^2)}{x^2+y^2}$$

$$(\text{i.e}) \quad dy = d\log(x^2+y^2)$$

$$\therefore y = \log(x^2+y^2) + c.$$

10. தீர்க்க! $(1+xy^2)dx + (1+x^2y)dy = 0$

தீர்வு! $dx + dy + xy(y\,dx + x\,dy) = 0.$

(i.e) $d(x+y)+xy\,d(xy)=0$

(i.e) $d(x+y)+\frac{1}{2}\,d(xy)^2=0$

$\therefore x+y+\frac{1}{2}(xy)^2=c.$

11. தீர்க்க : $(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=a^2(x\,dy-y\,dx)$

தீர்வு :

$$x\,dx+y\,dy=a^2.\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

(i.e) $\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=a^2.\,d\left(\tan^{-1}y/x\right)$

$\therefore \frac{1}{2}(x^2+y^2)=a^2\tan^{-1}(y/x)+c.$

12. தீர்க்க : $a(x\,dy+2y\,dx)=xy\,dy.$

தீர்வு :

$$a(x\,dy+2y\,dx)=xy\,dy \rightarrow (1)$$

$$ax\,dy+2ya\,dx-xy\,dy=0,$$

$\div xy$ இணைப்பதால்,

$$\frac{ax\,dy-xy\,dy+2ya\,dx}{xy}=0.$$

(i.e) $\left(\frac{a}{y}-1\right)dy+\frac{2a}{x}dx=0 \rightarrow (2)$

$M=\frac{2a}{x}$, $N=\frac{a}{y}-1$

$$M_y = 0, \quad N_x = 0.$$

2 தொகையிடல் கிடைப்பது

$$\int \left[\left[\frac{a}{y} - 1 \right] dy + 2a \right] \frac{dx}{x} = c$$

$$a \log y - y + 2a \log x = c$$

$$a (\log y + \log x^2) - y = c$$

$$a (\log x^2 y) - y = c$$

$$a (\log x^2 y) = y + c.$$

SEMESTER : III & IV
CORE COURSE : VI

Inst Hour	: 4 + (2)
Credit	: 5
Code	: 18K4M06

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND TRANSFORMS

UNIT I
First order, higher degree differential equations solvable for x, solvable for y, solvablefor dy/dx, Clairaut's form – Conditions of integrability of M dx + N dy = 0 – simple problems.
(Chapter IV – Sections 1,2 & 3, Chapter II – Section 6 of Text Book 1)

UNIT II
Particular integrals of second order differential equations with constant coefficients -Linear equations with variable coefficients – Method of Variation of Parameters (Omit third & higher order equations).
(Chapter V – Sections 1,2,3,4 & 5, Chapter VIII – Section 4 of Text Book 1)

UNIT III
Formation of Partial Differential Equation – General, Particular & Complete integrals – Solution of PDE of the standard forms - Lagrange's method - Few standard forms - Solving of Charpit's method.
(Chapter XII – Sections 1 – 6 of Text Book 1)

UNIT IV
PDE of second order homogeneous equation with Constant coefficients – Particular Integrals of the forms e^{ax+by}, Sin(ax+by), Cos(ax+by), $x^r y^s$ and $e^{ax+by} f(x,y)$.
(Chapter V of Text Book 2)

UNIT V
Laplace Transforms – Standard formulae – Basic theorems & simple applications – Inverse Laplace Transforms – Use of Laplace Transforms in solving ODE with constant coefficients.
(Chapter IX – Sections 1 – 8 of Text Book 1)

Text Book(s)

[1]. T.K.Manicavachagom Pillay & S.Narayanan, Differential Equations, S.Viswanathan Publishers Pvt. Ltd., 2011.
[2]. Arumugam & Isaac, Differential Equations, New Gamma Publishing House, Palayamkottai, 2014.

Book forReference

[1]. M.D.Raisinghania , Ordinary and Partial Differential Equations, S.Chand & Co
[2]. M.K. Venkatraman, Engineering Mathematics, S.V. Publications, 1985 Revised Edition

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

9.3.18
HOD

9/3/18

UNIT - 2

1. தீர்க்க : $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 6e^{5x}$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 6e^{5x}$

$D^2 - 4 = 0.$

துணைச் சமன்பாடு

$m^2 - 4 = 0.$

$m^2 = 4$

$m = \pm 2.$

நிரப்புச் சார்பு $= Ae^{2x} + Be^{-2x}$

சிறப்புத் தொகை $= \frac{1}{D^2 - 4} \cdot 6e^{5x}$

$= 6 \cdot \frac{1}{D^2 - 4} e^{5x}$

$= 6 \cdot \frac{1}{25 - 4} e^{5x}$

$= \frac{6}{21} \cdot e^{5x} = \frac{2}{7} e^{5x}$

பொதுத் தீர்வு

$\therefore y =$ நிரப்புச் சார்பு + சிறப்புத் தொகை

$= Ae^{2x} + Be^{-2x} + \frac{2}{7} e^{5x}$

2. தீர்க்க : $(D^2 - 5D + 4)y = 0.$

தீர்வு :-

கொடுக்கப்பட்ட $(D^2 - 5D + 4)y = 0.$

துணைச் சமன்பாடு

$m^2 - 5m + 4 = 0.$

$$(m-1)(m-4)=0$$

$$m=1,4$$

நிரப்புச்சார்பு $= c_1e^{x}+c_2e^{4x}$

$$\therefore y = c_1e^{x}+c_2e^{4x}$$

3. தீர்க்க : $(D^2+5D+6)y=0$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட $(D^2+5D+6)y=0$.

துணைச்சமன்பாடு $m^2+5m+6=0$.

$$(m+2)(m+3)=0$$

$$m=-2,-3.$$

$\therefore$ நிரப்புச்சார்பு $= c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$

பொதுத்தீர்வு $y = c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$.

4. தீர்க்க : $(D^2+5D+6)y=e^{x}$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட $(D^2+5D+6)y=0$.

துணைச்சமன்பாடு $m^2+5m+6=0$.

$$(m+2)(m+3)=0.$$

$$\therefore m=-2,-3.$$

நிரப்புச்சார்பு $= c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$

சிறப்புத்தொகை $= \dfrac{1}{D^2+5D+6}\cdot e^{x}$

$$= \frac{1}{1^2+5(1)+6}\cdot e^{x} = \frac{1}{12}e^{x}$$

பொதுத்தீர்வு

$y = c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}+\frac{1}{12}e^{x}$.

5. தீர்க்க : $(D^2+2D+1)y = 2e^{3x}$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட $(D^2+2D+1)y = 2e^{3x}$

துணைச் சமன்பாடு $m^2+2m+1=0$.

$(m+1)(m+1)=0$.

$\therefore m=-1,-1$.

நிரப்புச் சார்பு $= (C_1+C_2x)e^{-x}$

சிறப்புத் தொகை $= \dfrac{1}{(D^2+2D+1)} \cdot 2e^{3x}$

$= \dfrac{1}{3^2+2(3)+1} \cdot 2e^{3x}$

$= \dfrac{2e^{3x}}{9+6+1}$

$= \dfrac{2e^{3x}}{16} = \dfrac{e^{3x}}{8}$

$\therefore$ பொதுத்தீர்வு $y = (C_1+C_2x)e^{-x} + \dfrac{e^{3x}}{8}$.

6. தீர்க்க ! $(D^2-6D+13)y = 5e^{2x}$.

தீர்வு !

கொடுக்கப்பட்ட $(D^2-6D+13)y = 5e^{2x}$

துணைச் சமன்பாடு $m^2-6m+13=0$

$m = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-4(1)(13)}}{2(1)}$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2}$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm i2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3 \pm i\sqrt{3}.$$

நிரப்புச்சார்பு $= e^{5x}\left(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x\right).$

சிறப்புத்தொகை $= \dfrac{1}{(D^2-6D+13)} \cdot 5e^{2x}$

$$= 5 \cdot \frac{1}{(D^2-6D+13)} e^{2x}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{2^2-6(2)+13} e^{2x}$$

$$= \frac{5}{4-12+13} e^{2x}$$

$$= \frac{5e^{2x}}{5}$$

$$= e^{2x}.$$

$\therefore$ பொதுத்தீர்வு $y = e^{3x}\left(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x\right) + e^{2x}$

7. தீர்க்க : $(D^2+5D+4)y = x^2+7x+9.$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $(D^2+5D+4)y = x^2+7x+9$

துணைச் சமன்பாடு $m^2+5m+4=0.$

$$(m+4)(m+1)=0$$

$$\therefore m = -4, -1$$

நிரப்புச்சார்பு $= Ae^{-4x}+Be^{-x}$

சிறப்புத்தொகை $= \frac{1}{(D^2+5D+4)}(x^2+7x+9)$

$$= \frac{1}{4\left[1+\left(\frac{D^2+5D}{4}\right)^{-1}\right]}(x^2+7x+9)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{D^2+5D}{4}\right)^{-1}\right](x^2+7x+9)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{D^2+5D}{4}\right)+\left(\frac{D^2+5D}{4}\right)^2\cdots\right](x^2+7x+9)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\frac{D^2}{4}+\frac{5D}{4}-\frac{D^4}{16}+\frac{25D^2}{16}\cdots\right](x^2+7x+9)$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^2+7x+9-\frac{D^2}{4}(x^2+7x+9)+\frac{5}{4}D(x^2+7x+9)\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^2+7x+9-\frac{1}{2}-\frac{10}{4}x-\frac{35}{4}+\frac{50}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^2+\frac{9x}{2}+\frac{23}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[8x^2+36x+23\right]$$

∴ பொதுத்தீர்வு

$$y = Ae^{-4x}+Be^{-x}+\frac{1}{32}(8x^2+36x+23).$$

8. தீர்க்க: $(D^2-4D+3)y = \sin 3x \cos 2x$.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $(D^2-4D+3)y = \sin 3x \cos 2x$.

துணைச் சமன்பாடு $m^2-4m+3 = 0$

$$(m-3)(m-1) = 0$$

$$m = 1, 3.$$

நிரப்புச் சார்பு $= C_1e^{x} + C_2e^{3x}$

சிறப்புத் தொகை $= \cos 2x \cdot \sin 3x$

$$\therefore \sin 3x \cos 2x = \frac{\sin 5x + \sin x}{2}$$

$$= \frac{\sin 5x}{2} + \frac{\sin x}{2} \qquad \left[\because \sin A \cos B = \frac{\sin(A+B)}{2} + \frac{\sin(A-B)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 5x\right] + \frac{1}{2}\left[\sin x\right]$$

$$P.I_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-25-4D+3} \sin 5x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-22-4D} \sin 5x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{4D+22} \sin 5x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(4D-22)}{(4D+22)(4D-22)} \sin 5x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(4D-22)}{16D^2-484} \sin 5x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(4D-22)}{-400-484} \sin 5x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(4D-22)}{-884}\sin 5x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2(2D-11)}{884}\sin 5x\right]$$

$$= \frac{2D-11}{884}\sin 5x$$

$$= \frac{2D(\sin 5x) - 11\sin 5x}{884}$$

$$P.I_1 = \frac{10\cos 5x - 11\sin 5x}{884}$$

$$P.I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{D^2-4D+3}\cdot\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-1-4D+3}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{4D-2}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(4D+2)}{16D^2-4}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(4D+2)}{-16-4}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4D+2}{20}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2(2D+1)}{20}\sin x\right]$$

$$= \frac{(2D+1)}{20} \sin x.$$

$$P.I_2 = \frac{2D(\sin x) + \sin x}{20}$$

∴ பொதுத்தீர்வு,

$$y = Ae^{x} + Be^{3x} + \frac{10\cos 5x - 11\sin 5x}{884} + \frac{\sin x + 2\cos x}{20}.$$

9. தீர்க்க: $(D^3 - 2D + 4)y = e^x \cos x$.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $(D^3 - 2D + 4)y = e^x \cos x$.

துணைச் சமன்பாடு $(m^3 - 2m + 4) = 0$.

$(m+2)(m^2 - 2m + 2) = 0$.

$m = -2, \quad m = 1 \pm i$.

∴ நிரப்புச்சார்பு $= C_1 e^{-2x} + e^x + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$

சிறப்புத்தொகை $= \dfrac{1}{D^3 - 2D + 4} e^x \cos x$

$$= e^x \cdot \frac{1}{(D+1)^3 - 2(D+1) + 4} \cos x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - 2D - 2 + 4} \cos x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - 2D - 2 + 4} \cos x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D^3 + 3D^2 + D + 3} \cos x.$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D(-1)+3(-1)+D+3} \cdot \cos x$$

$$= xe^x \cdot \frac{1}{6D-2} \cos x$$

$$= \frac{xe^x \cdot (6D+2)}{(6D-2)(6D+2)} \cos x$$

$$= \frac{xe^x \cdot (6D+2)}{36D^2-4} \cos x$$

$$= \frac{xe^x (6D+2)}{36(1)-4} \cos x$$

$$= \frac{-xe^x}{20} (3D(\cos x) + \cos x)$$

$$= \frac{xe^x}{20} \cdot (3\sin x - \cos x).$$

$$\therefore y = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{xe^x}{20} (3\sin x - \cos x).$$

10. தீர்க்க !: $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

தீர்வு : $x = e^z$ என எடுத்துக்கொள்க.

$$\log x = z.$$

$$\Rightarrow (D(D-1) + 4D + 2)\, y = e^x$$

$$(D^2 - D + 4D + 2)\, y = e^x$$

$$(D^2 + 3D + 2)\, y = e^x$$

துணைச்சமன்பாடு

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$(m+2)\cdot(m+1) = 0$$

$$m = -2, -1.$$

நிரப்புச் சார்பு $= Ae^{-x} + Be^{-2x}$

சிறப்புத் தொகை

$$P.I = \frac{1}{(\theta+1)(\theta+2)} e^{x},$$ இங்கு $D = \theta = x\frac{d}{dx}$

$$= \left[\frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{\theta+2}\right] e^{x}$$

$$= x^{-1}\int e^{x}\,dx - x^{-2}\int x e^{x}\,dx$$

$$= x^{-1}e^{x} - x^{-2}(xe^{x} - e^{x})$$

$$= x^{-2}e^{x}$$

$$\therefore y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + x^{-2}e^{x}.$$

UNIT-3

1. $z = (x+a)(y+b)$. z-லிருந்து a மற்றும் b யை நீக்குக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட $z = (x+a)(y+b) \rightarrow (1)$

x மற்றும் y ஐ வகையிட,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1.(y+b) = y+b \Rightarrow p = y+b$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x+a).1 = x+a \Rightarrow q = x+a$$

a மற்றும் b யை நீக்க,

சமன்பாடு (1) லிருந்து a மற்றும்

$$z = q.p$$

(i.e) $z = pq$

2. $z = f(x^2+y^2)$ ல் தன்னிச்சையான செயல்பாட்டை அகற்றுக

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $z = f(x^2+y^2) \rightarrow (1)$

x மற்றும் y-ஐ வகையிட

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2+y^2)\,2x \Rightarrow p = f'(x^2+y^2).2x \rightarrow (2)$$

மற்றும்

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2+y^2).2x \Rightarrow q = f'(x^2+y^2)\,2y \rightarrow (3)$$

$$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{f'(x^2+y^2).2x}{f'(x^2+y^2).2y}$$

$$\Rightarrow py = qx$$

3. தன்னிச்சையான சார்புகளை நீக்குக.

$$f\left(x^2+y^2+z^2,\ z^2-2xy\right) = 0.$$

நீக்க $x^2+y^2+z^2 = F(z^2-2xy)$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $x^2+y^2+z^2 = F(z^2-2xy)$.

x மற்றும் y-யை வகையிட

$$2x+2z\frac{\delta z}{\delta x} = F'(z^2-2xy)\left(2z\frac{\delta z}{\delta x}-2y\right)$$

$$2x+2zp = F'(z^2-2xy)(2zp-2y) \rightarrow (2)$$

மற்றும்

$$2y+2z\frac{\delta z}{\delta y} = F'(z^2-2xy)\left(2z\frac{\delta z}{\delta y}-2x\right)$$

$$2y+2zq = F'(z^2-2xy)(2zq-2x) \rightarrow (3)$$

$\frac{(2)}{(3)}$ F' நீக்க,

$$\frac{2x+2zp}{2y+2zq} = \frac{F'(z^2-2xy)(2zp-2y)}{F'(z^2-2xy)(2zq-2x)}$$

$$\frac{2(x+zp)}{2(y+zq)} = \frac{2(zp-y)}{2(zq-x)}$$

$$\frac{x+zp}{y+zq} = \frac{zp-y}{zq-x} \Rightarrow (x+zp)(zq-x) = (zp-y)(y+zq)$$

$$\Rightarrow xzq - x^2 + z^2pq - xzp = yzp - y^2 + z^2pq - yzq$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = (xz+yz)p - (xz+yz)q$$

$$\Rightarrow (y-x)(y+x) = (x+y)zp - (x+y)zq$$

$$\Rightarrow (y-x) = z(p-q)$$

$$\Rightarrow \text{(i.e)}\ z(p-q) = y-x$$

4. இங்கு z லிருந்து f மற்றும் ϕ வை நீக்குக.

$$z = f(x+ay) + \phi(x-ay)$$

தீர்வு :

x மற்றும் y-ஐப் பொறுத்து வகையிட

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+ay) + \phi'(x-ay).$$

(i) $p = f'(x+ay) + \phi'(x-ay)$.

மற்றும்

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x+ay)a + \phi'(x-ay)(-a).$$

(ii) $q = af'(x+ay) - a\phi'(x-ay)$

மறுபடியும் வகையிட

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f''(x+ay) + \phi''(x-ay).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x+ay) + \phi''(x-ay)$$

மற்றும்

$$\frac{\partial q}{\partial y} = af''(x+ay)a - a\phi''(x-ay)(-a)$$

$$= a^2 f''(x+ay) + a^2\phi''(x-ay)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = a^2\left[f''(x+ay) + \phi''(x-ay)\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$\Rightarrow r = a^2 t \Rightarrow r - a^2 t = 0$

இங்கு $r = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$t = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5. தீர்க்க ! $(y+z)p + (z+x)q = x+y.$ (A)

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட $(y+z)p+(z+x)q = x+y$

லெக்ராஞ்சியன் சமன்பாடு

$$Pp + Qq = R.$$

இங்கு $P = y+z$, $Q = z+x$, $R = x+y.$

துணைச் சமன்பாடு

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

(i.e.) $$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{dx+dy+dz}{y+z+z+x+x+y}$$

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{d(\Sigma x)}{2\Sigma x}.$$

அவை சமமானது,

$$\frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dy-dz}{z-y} = \frac{dz-dx}{x-z} = \frac{\Sigma dx}{2\Sigma x}.$$

முதல் இரண்டு விகிதத்தை எடுத்து அதை, தொகையிட!

$$\int \frac{dx-dy}{y-x} = \int \frac{dy-dz}{\quad}$$

$$\int \frac{dx-dy}{-(x-y)} = \int \frac{dy-dz}{y-z}.$$

$$\log(x-y) = \log(y-z) + \log a$$

$$\log(x-y) = \log\left[(y-z)\cdot a\right]$$

(i.e.) $$x-y = (y-z)\,a$$

$$\frac{x-y}{y-z} = a.$$

இதில் மூன்றாம் நான்காம் விகிதங்களை எடுத்து தொகை காண்க.

$$\int \frac{dx - dy}{-(x-y)} = \int \frac{\Sigma\, dx}{2\Sigma x}$$

$$-2\int \frac{dx-dy}{(x-y)} = \int \frac{\Sigma\, dx}{\Sigma x}$$

$$-2\log(x-y) = \log \Sigma x + \log b.$$

$$\log (x-y)^{-2} = \log(\Sigma x . b)$$

$$\frac{1}{(x-y)^2} = b\Sigma x \Rightarrow (x-y)^2 \Sigma x = b.$$

6. தீர்க்க: $px(y^2+z) - qy(x^2+z) = z(x^2-y^2)$ என்ற சமன்பாட்டின் தொகையைக் காண்க. கோட்டின் வழியாக செல்லும் தீர்வு. $x+y=0$, $z=1$.

தீர்வு:- கொடுக்கப்பட்ட $px(y^2+z) - qy(x^2+z) = z(x^2-y^2)$

$P = x(y^2+z)$, $Q = -y(x^2+z)$, $R = z(x^2-y^2)$

துணைச் சமன்பாடு

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{x(y^2+z)} = \frac{dy}{-y(x^2+z)} = \frac{dz}{z(x^2-y^2)} = \frac{x\,dx + y\,dy}{z(x^2-y^2)}$$

மூன்றாம் நான்காம் விகிதங்களை எடுத்து

$$\int \frac{dz}{z(x^2-y^2)} = \int \frac{x\,dx + y\,dy}{z(x^2-y^2)}$$

$$\int dz = \int x\,dx + y\,dy$$

$$z + a = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

$$2z + a = x^2 + y^2 \rightarrow (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2z = a$$

[illegible],

$$\frac{dx/x}{y^2+z} = \frac{dy/y}{-(x^2+z)} = \frac{dz}{z(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{dx/x + dy/y}{y^2+z-x^2-z}$$

$$= \frac{dx/x + dy/y}{y^2-x^2}$$

கொடுத்த இரண்டு விகிதங்களை [illegible]

கிடைப்பது $$\frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}}{x^2-y^2+y^2-x^2} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0.$$

தொகையிட,

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

$$\log x + \log y + \log z = \log b.$$

(i.e) $$\log(xyz) = \log b.$$

$$xyz = b \rightarrow (2).$$

தீர்வு $$\phi(x^2+y^2-2z,\ xyz) = 0.$$

$$x^2+y^2-2z = f(xyz)$$

$$(x+y)^2 - 2xy - 2z = f(xyz)$$

$x+y=0 \; , \; z=1$

$-2(xy+1) = f(xy)$

$\therefore f(xyz) = -2(xyz+1)$

$\therefore x^2+y^2+(-2z) = -2(xyz+1)$.

7. $x^2p+y^2q+z^2=0$ -ன் ஒருங்கிணைந்த தீர்வுகளை $xy=x+y$; $z=1$ என்ற வளைவை செல்கிறது கொண்டதையும். காண்பதை தீர்.

தீர்வு : துணையின் சமன்பாடு

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{-z^2}.$$

தொகையிட, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=a$ மற்றும் $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b$

$$\therefore \frac{1}{z}+\frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

என்ற வளைவை செல்கிறது.

$xy=x+y \; , \; z=1$

$1+1/x = f(1/y+1)$

$xy = x+y \; , \; 1 = 1/x+1/y$.

$\therefore 1+1/x = 2-1/y = 3-(1+1/y)$

$\therefore f(1/y+1) = 3-(1+1/y)$.

$1/z+1/x = 3-(1/y+1/z)$.

8. సాధించు: (i) $q = xp + p^2$

సాధన:

$$q = xp + p^2.$$

$q = a$ అనుకో. $a = xp + p^2 \Rightarrow p^2 + xp - a = 0.$

$$\therefore p = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4a}}{2} = \phi(x, a)$$

$$dz = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4a}}{2}\,dx + a\,dy.$$

$$\therefore z = \int \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4a}}{2}\,dx + ay + b.$$

$$\therefore z = -\frac{x^2}{4} \pm \left\{ \frac{x}{4}\sqrt{4a+x^2} + a \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right)\right\} + ay + b.$$

(ii) $p = y^2 q^2.$

సాధన:

$$p = a^2 \text{ అనుకో.}$$

$$q = \pm \frac{a}{y}.$$

$$dz = a^2 dx \pm \frac{a}{y}\,dy$$

$$\therefore z = a^2 x \pm a \log y + b$$

(iii) $p(1+q^2) = q(z-1)$

సాధన:

$$q = ap \text{ అనుకో.}$$

$$p(1+a^2p^2) = ap(z-1)$$

$$\therefore 1 + a^2p^2 = a(z-1)$$

$$\text{(or) } p = \pm \frac{\sqrt{az-a-1}}{a}$$

$$dz = \pm \frac{\sqrt{az-a-1}}{a}\, dx \pm \frac{a\sqrt{az-a-1}}{a}\, dy$$

(i.e.) $\pm \dfrac{a\, dz}{\sqrt{az-a-1}} = dx + a\, dy$

i.e.) $\pm \displaystyle\int \frac{a\, dz}{\sqrt{az-a-1}} = x + ay + b.$

i.e.) $\pm\, 2\sqrt{az-a-1} = x + ay + b.$

9. தீர்க்க : $p+q = x+y.$

தீர்வு :

$$p - x = y - q.$$

$p - x = a$, $y - q = a$ என்க.

$p = x + a$, $q = y - a$

$$\therefore\ dz = (x+a)\, dx + (y-a)\, dy$$

$$z = \frac{(x+a)^2}{2} + \frac{(y-a)^2}{2} + b.$$