III - B.Sc

SEMESTER : V
CORE COURSE : VIII

Inst Hour	: 6
Credit	: 5
Code	: 18K5M08

ABSTRACT ALGEBRA

UNIT 1:
Groups: Definitions and Examples of Groups – Elementary Properties of Groups.
Finite Groups, Subgroups: Terminology and Notation – Subgroup Tests – Examples of Subgroups. **Cyclic Groups:** Properties of Cyclic Groups – Classification of Subgroups of Cyclic Groups.
Part 2: Sections 2, 3, 4.

UNIT 2:
Permutation Groups: Definition and Notation – Cycle Notation.
Isomorphisms: Definition and Examples – Cayley's Theorem – Properties of Isomorphisms – Automorphisms.
Cosets and Lagrange's Theorem: Properties of Cosets – Lagrange's Theorem and Consequences (upto Theorem 7.3).
Part 2: Section 5 (Page 99 – 104), Section 6 (Page 127 – 138), Section 7 (Page 144 – 151).

UNIT 3: Page. 6
Normal Subgroups and Factor Groups: Normal Subgroups – Factor Groups – Applications of Factor Groups – Internal Direct Products.
Group Homomorphisms: Definition and Examples – Properties of Homomorphisms – The First Isomorphism Theorem.
Part 2: Sections 9, 10.

UNIT 4:
Introduction to Rings: Definition – Examples of Rings – Properties of Rings – Subrings.
Integral Domains: Definition and Examples – Fields – Characteristic of a Ring.
Ideals and Factor Rings: Ideals – Factor Rings.
Part 3: Sections 12, 13, 14(Page 267 – 271).

UNIT 5:
Ring Homomorphism: Definition and Examples – Properties of Ring – Homomorphism – The Field of Quotients.
Part 3: Section 15.

Text Book
Joseph A.Gallian, Contemporary Abstract Algebra, Cengage Learning, 8th Edition, 2013.

Books for Reference
[1] I.N.Herstein. Topics in Algebra.

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

9.3.18
Department of Mathematics
N. GOVERNMENT ARTS COLLEGE
THANJAVUR-613

10 · 2022 9/3/18

~~அலகு~~

அலகு-2

வரிசை மாற்றம்:

ஒரு கணத்தின் உறுப்புக்களை ஒரு வரிசையில் அடுக்கி வைத்து பின் அவ்வரிசையில் உள்ள உறுப்புக்களை மாற்றி அடுக்கி அமைத்தால் ஒரு வரிசை மாற்றம் அல்லது வரிசை மாற்றல் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு -1

நாம் α என்ற வரிசைமாற்றத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\alpha = \{1,2,3,4\}$$

எனில் $\alpha(1)=2$, $\alpha(2)=3$, $\alpha(3)=1$ $\alpha(4)=4$

என்றால். இந்த வரிசை மாற்றத்தை நாம் அணிக்கோவை வடிவில் எளிமையாக எழுத முடியும்.

$$\text{ie} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

இங்கு. $\alpha(j)$ நேரடியாகவே j க்கு கீழ் இடம்பெற்றுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு -2

β என்ற வரிசைமாற்றம் $\{1,2,3,4,5,6\}$ எனக் கொள்வோம். இதை இங்கு.

$\beta(1)=5$, $\beta(2)=3$, $\beta(3)=1$, $\beta(4)=6$, $\beta(5)=2$, $\beta(6)=4$.

என்பதை பின்வருமாறு அணிக்கோவை வடிவில் எழுதலாம்.

அதாவது,

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

என வருமாம்.

வரிசை மாற்றங்களின் சேர்வை:

n - உறுப்புகள் உள்ள ஒரு கணத்தின் எல்லா வரிசைமாற்றங்களையும் ஒன்றுக்கொன்று சேர்க்கக்கூடிய சேர்வை ஒரு ஒன்றிருக்கிறது,

அதாவது,

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ என்ற 5 கணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

என்றால்

$$\gamma\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

சமச்சீர் குலம்:

n-பொருள்களின் வரிசை மாற்றங்கள் எல்லாம் அடங்கிய கணம் S_n என்று குறிக்கப்படும். இதனில் $n!$ வரிசை மாற்றங்கள் உள்ளன. இது மேலே வரையறுக்கப்பட்ட சேர்வைக்கு குலமாகிறது. இது n-பொருள்களின் சமச்சீர் குலம் எனப்படும். இது $n!$ உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு முடிவுறு குலம்.

எடுத்துக்காட்டு-1

S_3 சமச்சீர் குலம்.

S_3 என்பது 3 உறுப்புகள் கொண்ட முடிவுறு குலம் ஆகும்.

அதாவது $S_3 = \{1,2,3\}$. எனில் சமச்சீர் குலம் S_3 என்பது சேர்வையின் கீழ் ஆறு உறுப்புகளை உருவாக்கும்,

அந்த ஆறு உறுப்புகளாவன,

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \alpha^2\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

குறிப்பாக இங்கு $\beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \neq \alpha\beta$

என்பது பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யாது. எனவே இது ஒரு அபீலியன் குலம் அல்ல.

குறிப்பு:

S_1, S_2 ஐ தவிர மீதமெல்லாம் சமச்சீர் குலங்களும் பரிமாறாக் குலங்களே. 6 வரிசையுள்ள S_3 தான் மீச்சிறு பரிமாறாக் குலம்.

வரிசைமாற்றத்தின் சுழலமைப்பு:

கணத்தின் வரிசை மாற்றங்களை சுழல்களின் சேர்வைகளாக மட்டுமல்ல, வெட்டாத சுழல்களின் சேர்வைகளாக குறிகாட்டலாம். இப்படி செய்வதால் வரிசை மாற்றங்களின் பண்புகள் எளிதாக்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

என்ற கணத்தின் வரிசை மாற்றம்.

$$(1\ 2)(3\ 4\ 6)(5)$$

எடுத்துக்காட்டு - 2

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

என்ற கணத்தின் வரிசைமாற்றத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம்

β என்பதின் அடுக்கு வரிசைமாற்றம்

$$(2,3,1,5)(6,4) \ (\text{or}) \ (4,6)(3,1,5,2)$$

ஒற்றை, இரட்டை வரிசைமாற்றம்

கணிதத்தில் வரிசைமாற்றங்கள் ஒற்றைப்படை வரிசைமாற்றங்கள் இரட்டைப்படை வரிசைமாற்றங்கள் என இரு வகைப்படும். ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றமும் அது எத்தனை இடமாற்றங்களின் சேர்க்கையாக இருக்கிறது என்பதை பொறுத்து அது ஒற்றைப்படையாகவோ, இரட்டைப்படையாகவோ வகைப்படுத்தப்படும்.

எ.கா

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ 2 \ 4 \ 5)$$

$$= (1 \ 2)(1 \ 4)(1 \ 5)$$

3 - இடமாற்றங்களின் சேர்க்கை $\therefore$ ஒற்றைப்படை வரிசைமாற்றம்.

இயல்மாறாக் கோர்த்தல்:

உரையறை: ϕ ஆனது (1-1) ஆக இருக்கும்போது குலம் G யிலிருந்து குலம் G' க்கான செயல்மாறாக் கோர்த்தல் ϕ ஐ இயல் மாறாக் கோர்த்தல் என்போம்.

அதாவது $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ இங்கு $a, b \in G$.

எடுத்துக்காட்டு:

மெய்யெண்களின் கூட்டல் குலம் $(R,+)$ நேர் மெய் எண்களின் பெருக்கல் குலத்துடன் $(R^*, \times)$ இயல்மாறாக் கோர்த்தலாகும்.

$$(R,+) \cong (R^+, \times).$$

கெய்லின் தேற்றம்:

தேற்றம்: ஒவ்வொரு குலமும் தக்க சில S க்கான A(S)-ன் ஒரு உட்குலத்திற்கு இயல் மாறாதவை.

நிரூபணம்: G ஒரு கொடுக்கப்பட்ட குலம் என்க. அப்போது G யிலிருந்து G-ன் மேலான ஒன்றுக்கொன்றான கோர்த்தல்களான

கணம் $A(G)$ ஆனது கலப்புச் சார்புகளின் கீழ் ஒரு குலத்தை அமைக்கும் என நமக்கு தெரியும். $A(G)$ ஐ G-ன் வரிசை மாற்றங்களாலான குலம் என்போம். $g \in G$ என தீர்மானிப்போம்.

$\forall\, x \in G$ க்கு $xT_g = xg$ என்றவாறு $T_g : G \to G$ ஐ நாம் வரையறை செய்வோம்.

முதலில் T_g ஆனது $(1-1)$ என நாம் நிறுவுவோம்.

$x, y \in G$ மற்றும் $xT_g = yT_g$ எனில் $xg = yg$.

வலது அடிக்கல் விதிப்படி நாம் பெறுவது $x = y$

$\therefore T_g$ ஆனது $(1-1)$.

அடுத்து T_g முழு என நாம் நிறுவுவோம்.

$y \in G$ எனில் அப்போது $yg^{-1} \in G$. $x = yg^{-1}$ என்க.

இப்போது $xT_g = xg$

$$= (yg^{-1})g$$
$$= y(g^{-1}g)$$
$$= ye$$
$$= y$$

$\therefore T_g$ ஆனது முழு

$\therefore T_g$ ஆனது $(1-1)$ மற்றும் முழு. எனவே T_g ஆனது G-ன்

ஒரு வரிசை மாற்றம் T_g $A(G)$.

G யிலிருந்து G-ன் மீதான ஒன்றுக்கொன்றான கோர்த்தல்களை கணம் $A(G)$ ஆனது சார்புகளின் கீழ் ஒரு குலம் என நமக்கு தெரியும்.

$\psi(g) = T_g$ என்றவாறு $\psi : G \to A(G)$ ஐ நாம் வரையறை செய்வோம்.

இப்போது $g, h \in G$ எனில் $T_g T_h = T_{gh}$ என நாம் நிறுவுவோம்.

$x \in G$ எனில் அப்போது

$$
\begin{aligned}
x T_g T_h &= (x T_g) T_h \\
&= (xg) T_h \\
&= (xg) h \\
&= x T_{gh}
\end{aligned}
$$

$\therefore T_g T_h = T_{gh}$.

இப்போது

$$
\begin{aligned}
\psi(gh) &= T_{gh} \\
&= T_g T_h \\
&= \psi(g)\psi(h)
\end{aligned}
$$

$\therefore \psi$ ஆனது G யிலிருந்து $A(G)$க்கு ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல். K ஆனது ψ-ன் உட்கரு என நாம் கொள்வோம்.

$k \in K$ எனில் அப்போது $\psi(k) = T_e$ இங்கு T_e என்பது $A(G)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு $x \in G$ எனில் அப்போது $x T_k = x T_e$

$\therefore xK = xe$

$\therefore K = e$

$\therefore K = \{e\}$

$\Rightarrow$ ψ ஆனது $(1-1)$

ψ ஐ G யிலிருந்து $\psi(G)$ க்கான கோர்த்தல் என நாம் கருதினால் ψ ஆனது செயல்மாறாக் கோர்த்தல் $(1-1)$ மற்றும் மேல். G ஒரு குலமானால் $\psi(G)$ ஆனது $A(G)$-ன் ஒரு உட்குலம்.

$\therefore G$ ஆனது $A(G)$-ன் ஒரு உட்குலத்திற்கு இயல்மாறானவை.

$G = S$ எனக் கொண்டால் பின்வரும் தேற்றத்தை நாம் பெறுகிறோம்.

இணைகணம்:

G என்பது ஒரு குலம். H என்பது உட்குலம் எனக. a ஆனது G-ல் உள்ள ஒரு உறுப்பு. $\{ah \mid h \in H\}$ என்பது aH என குறிக்கப்படுகிறது. $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ மற்றும் $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$.

aH என்பது இடது இணைக்கணமாகும். Ha என்பது வலது இணைக்கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$G = S_3$ எனக, $H = \{1, 13\}$ எனில் இடது இணைக்கணங்கள்:

$(1)H = H$

$(12)H = \{(12), (12)(13)\}$

$= \{(1\,2), (1\,3\,2)\}$

$= (1\;3\;2)\,H$

$(1\,3)H = \{(1\,3), (1)\} = H,$

$(2\,3)H = \{(2\,3), (2\,3)(1\,3)\}$

$= (2\,3), (1\,2\,3)$

$= (1\,2\,3)H.$

எடுத்துக்காட்டு :-2

H என்பது $\{0,3,6\}$. H என்பது Z_9-ன் துணைக்குலம். இது

இனில் கூட்டலைப்பொருத்து $a+H$ என்பது aH ஐ உள்ளடக்கியது.

எனவே Z_9 ல் உள்ள H இணைகணங்கள்,

$0+H = \{0,3,6\} = 3+H = 6+H$

$1+H = \{1,4,7\} = 4+H = 7+H$

$2+H = \{2,5,8\} = 5+H = 8+H.$

இணைக்கணங்களின் பண்புகள்:

H என்பது குலம் G-ன் துணைக்குலம் ஆகும். a மற்றும்

b என்பவை குலம் G-ல் உள்ளவை. எனில்,

1. $a \in aH$

2. $aH = H$ iff $a \in H$

3. $aH = bH$ அல்லது $aH \cap bH = \phi$

4. $aH = bH$ iff $a^{-1}b \in H$

5. $|aH| = |bH|$,

6. $aH = Ha$ iff $H = aHa^{-1}$

7. aH என்பது G-ன் உட்குலம் எனில் $a \in H$.

நிரூபணம்:

1. $a = ae$

ie $ae \in aH$

$\Rightarrow a \in aH$.

2. $aH = H$

எனில் $a = ae \in aH$

$= H$

$a \in H$ என வைத்துக்கொள்வோம்.

நாம் நிறுவ வேண்டியது

$aH \subseteq H$

மற்றும் $H \subseteq aH$

இதன் முதல் பகுதியானது H-ன் அடைவு விதியிலிருந்து நேரடியாகும்.

எனவே நாம் நிறுவ வேண்டியது

$H \subseteq aH$

$h \in H$ என எடுத்துக்கொள்வோம்

$a \in H$ என்பதால் $h \in H$.

நாம் ஏற்கனவே அறிந்தபடி

$a^{-1}h \in H$

ஆதலால் $h = eh = (aa^{-1})h$

$= a(a^{-1}h)$

$\in aH$.

3. $aH \cap bH \neq \emptyset$

நாம் நிறுவ வேண்டியது

$aH = bH$

இங்கு $x \in aH \cap bH$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

மேலும், h_1, h_2 என்பவை H-ன் உறுப்புகள்.

ஆகவே,
$x = ah_1$

மற்றும் $x = bh_2$

எனவே, $a = xh_1^{-1} = bh_2h_1^{-1}$

and $aH = bh_2h_1^{-1}H = bH$ (பண்பு-2 ன் படி)

4. $aH = bH$ என்பதை கொண்டு.

$H = a^{-1}bH$ (பண்பு-2 ன் படி)

6. $aH = Ha$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$(aH)a^{-1} = (Ha)a^{-1}$

$\therefore aHa^{-1} = H$

7. aH என்பது ஒரு உட்குலம். இதில் e என்ற சமனி உறுப்பும் உள்ளது. அதாவது

$$aH \cap eH \neq \phi$$

பண்பு-3-ன்படி நாம் பெறுவது

$$aH = eH = H.$$

பண்பு-2-ன்படி நாம் பெறுவது

$$a \in H.$$

மறுதலையாக $a \in H \Rightarrow aH = H$ (பண்பு 2 ன்படி)

லக்ராஞ்சின் தேற்றம்:

G என்பது வரையறுக்கப்பட்ட குலம். H என்பது ஒரு துணைக் குலம். எனில் $|H|$ என்பது $|G|$ ஐ வகுக்கிறது. மேலும் இடது (வலது) இணைக்கணங்களின் எண்ணிக்கை H ல் உள்ளது. G என்பது $|G|/|H|$. குறிப்பாக H ன் வரிசை G-ன் வரிசையை வகுக்கிறது.

ஆதாரம்:

$a_1H, a_2H, \ldots a_rH$ என்பவை மாறுபட்ட இடது இணைக்கணங்கள் H என்பது G-ல் உள்ள உட்குலம். ஒவ்வொரு a யும் G-ல் உள்ளது.

இதிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$aH = a_iH.$$

பண்பு 1-ன் படி

$$a \in aH.$$

G-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் a_iH-ல் உள்ள ஒரு இணைக்கணம் ஆகும். அதாவது

$$G = a_1H \cup \dots\dots \cup a_rH.$$

பண்பு 3-ன் படி

$$|G| = |a_1H| + |a_2H| + \dots\dots + |a_rH|$$

இறுதியாக $|a_iH| = |H|$ என்பதால் நாம் பெறுவது

$$|G| = r|H|.$$

Hence தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

துணைத்தேற்றம்-1 (|a| என்பது |G| வகுக்கும்)

G என்பது ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட குலம்.

a என்பது G-ல் உள்ள ஒரு உறுப்பு. |a| என்பது உறுப்பின் வரிசையாகும் |G| என்பது குலத்தின் வரிசையாகும். ஒவ்வொரு |a| யும் |G| ஐ வகுக்கும்.

துணைத்தேற்றம்-2 ($a^{|G|} = e$)

G என்பது வரையறுக்கப்பட்ட குலம் எனக. $a \in G$

எனில் $a^{|G|} = e$.

நேர்மை உட்குலங்கள் மற்றும் ஈ.அக்குலங்கள்

வரையறை : நேர்மை உட்குலங்கள்

N என்பது G-ன் உட்குலம் என்க. ஒவ்வொரு $g \in G$-க்கு, $n \in G$-க்கு $gng^{-1} \in N$ இருந்தால் N-ஐ G-ன் நேர்மை உட்குலம் என்போம். $gNg^{-1} = \{gng^{-1} / n \in N\}$ எனில் அப்போது மேற்கூறிய வரை இலக்கணத்தை பின்வருமாறும் கூறலாம்.

N என்பது G-ன் ஒரு உட்குலம் என்க. ஒவ்வொரு $g \in G$-க்கு $gNg^{-1} \subset N$ என இருந்தால் N-ஐ G-ன் நேர்மை உட்குலம் என்போம்.

தேற்றம்

குலம் G-ன் ஒரு உட்குலம் N என்பது நேர்மை உட்குலமாவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை ஒவ்வொரு $g \in G$-க்கு $gNg^{-1} = N$

நிரூபணம் தேவையான பகுதி

N என்பது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என்க.

அப்போது ஒவ்வொரு $g \in G$-க்கு, $gNg^{-1} \subset N$

g-க்குப் பதிலாக g^{-1} என எடுத்துக் கொண்டால்

$g^{-1}N(g^{-1}) \subset N$

$g^{-1}Ng \subset N$

$g(g^{-1}Ng)g^{-1} \subset gNg^{-1}$

$(gg^{-1})N(gg^{-1}) \subset gNg^{-1}$

$eNe \subset gNg^{-1}$

$N \subset gNg^{-1}$

$\Rightarrow gNg^{-1} = N.$

போதுமான பகுதி

$\forall g \in G$-க்கு $gNg^{-1} = N$ என்க.

அப்போது $\forall g \in G$-க்கு $gNg^{-1} \subset N$

$\therefore$ நேர்மை உட்குலத்தின் வரை இலக்கணப்படி N-ஆனது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம்.

தேற்றம்:

G-ன் ஒரு உட்குலம் N ஆனது நேர்மையாக இருப்பதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை G-ல் N-ன் ஒவ்வொரு இடது திணைக்குலமும் G-ல் N-ன் ஒரு வலது திணைக்குலம்.

நிரூபணம் தேவையான பகுதி

N-ஆனது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என்க.

அப்போது ஒவ்வொரு $g \in G$-க்கு $gNg^{-1} = N$. பின்புறமாக g-ஆல் பெருக்க நாம் பெறுவது

$$(gNg^{-1})g = Ng$$

$$gN(g^{-1}g) = Ng$$

$$gNe = Ng$$

$$gN = Ng$$

∴ G-ல் N-ன் ஒவ்வொரு இடது இணைக்கணமும் G-ல் N-ன் ஒரு வலது இணைக்கணம்.

போதுமான பகுதி

G-ல் N-ன் ஒவ்வொரு இடது இணைக்கணமும் G-ல் N-ன் ஒரு வலது இணைக்கணமாகட்டும் $g \in G$-க்கு gN-ஐ நாம் கருதுவோம். அப்போது இது ஒரு வலது இணைக்கணத்திற்குச் சமம்.

$gN = Ng_1$ —— (1) இங்கு $g_1 \in G$

இப்பொழுது $ge \in gN$. அதாவது $g \in gN$

∴ $g \in Ng_1$

மேலும் $eg \in Ng$ அதாவது $g \in Ng$.

∴ Ng மற்றும் Ng_1 பொதுவாக g-ஐப் பெற்றுள்ளது

∴ Ng மற்றும் Ng_1 ஆகிய இரண்டும் விலக்கக் கூடியவை அல்ல.

∴ Ng_1 மற்றும் Ng_1 ஆகிய இரண்டும் ஒன்றே

∴ $Ng = Ng_1$ —— (2)

⇒ (1) மற்றும் (2) லிருந்து நாம் பெறுவது $gN = Ng$

∴ N ஆனது G-ன் நேர்மை.

தேற்றம்

G ஒரு அபீலியன் குலம் எனில் அப்போது G-ன் ஒவ்வொரு உட்குலமும் நேர்மை.

நிரூபணம்.

N ஆனது அபீலியன் குலம் G-ன் ஒரு உட்குலம் என்க. அப்போது ஒவ்வொரு $n \in N$ மற்றும் $g \in G$-க்கு

$gng^{-1} = ngg^{-1}$ (பரிமாற்று விதியின்படி)

$= ne$

$= n \in N$

$\therefore$ N-ஆனது G-ன் நேர்மை உட்குலம்.

(எ.கா).1

வழக்கமான கூட்டலின் கீழ் $Z = \{0, \pm 1, \pm 2 \cdots\}$ ஒரு அபீலியன் குலம் $2Z = \{2m \,/\, m \in Z\}$ என்க.

$x, y \in 2Z$ என்க. அப்போது $x = 2m_1, m_1 \in Z$ மற்றும் $y = 2m_2, m_2 \in Z$

$x - y = 2m_1 - 2m_2 = 2(m_1 - m_2) \in 2Z\, m_1 - m_2 \in Z.$

$\therefore$ $2Z$- ஆனது Z-ன் ஒரு உட்குலம்.

Z- அபீலியன் ஆதலால் மேலும் உள்ள தேற்றத்தின் படி $2Z$ ஆனது Z-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம்.

தேற்றம் :

G ஒரு குலமெனக் கொள்க. $Z(G) = \{x / x \in G$ மற்றும் $xg = gx \ \forall g \in G\}$ என்க. முதலில் $Z(G)$ ஆனது G-ன் ஒரு உட்குலம் என நாம் நிறுவ வேண்டும்.

நிரூபணம் :

$x, y \in Z(G)$ எனின் அப்போது

$$xg = gx \ \forall g \in G$$

$$yg = gy \ \forall g \in G$$

$\therefore (xy)g = x(yg)$ (சேர்ப்பு விதியின்படி)

$= x(gy)$ (பரிமாற்று விதியின்படி)

$= (xg)y$ (சேர்ப்பு விதியின்படி)

$= (gx)y$ (பரிமாற்று விதியின்படி)

$= g(xy)$ (சேர்ப்பு விதியின்படி)

$\therefore xy \in Z(G)$

மேலும் $xg = gx$ -ன் முன்புறமும் பின்புறமும் x^{-1} ஆல் பெருக்க நாம் பெறுவது

$$x^{-1}(xg)x^{-1} = x^{-1}(gx)x^{-1}$$

$$(x^{-1}x)gx^{-1} = x^{-1}g(xx^{-1})$$

$$Egx^{-1} = x^{-1}ge$$

$$gx^{-1} = x^{-1}g$$

Scanned with CamScanner

∴ $Z(G)$ ஆனது G-ன் ஒரு உட்குலம். அடுத்து $Z(G)$ ஆனது G-ன் நேர்மை என நாம் நிறுவ வேண்டும். $n \in Z(G)$ மற்றும் $g \in G$ என்க.

$$gng^{-1} = (ng)g^{-1} \quad . \quad gn = ng$$

$$= n(gg^{-1})$$

$$= ne$$

$$= n \quad , \quad n \in N . \quad gng^{-1} \in N .$$

∴ $Z(G)$ ஆனது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம். $Z(G)$-ஐ G-ன் மையம் என்போம்.

தேற்றம்

குறி இரண்டு உடைய H ஆனது G-ன் ஒரு உட்குலமெனில் அப்போது H ஆனது G-ன் நேர்மை உட்குலம்.

நிரூபணம்

$a \in H$ என்க. H ஆனது குறி 2 உடைய ஒரு உட்குலமாதலால்

$G = He \cup Ha$

$G = eH \cup aH$

H மற்றும் Ha ஆனது ஒன்றையொன்று வெட்டாதது மற்றும் அவைகளின் சேர்ப்பு G ஆதலால்

$aH = G - H$

∴ $aH = Ha$

∴ H ஆனது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம்.

Scanned with CamScanner

தேற்றம்

G-ன் ஒரு உட்குலம் N ஆனது நேர்மையாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை G-ல் N-ன் இரண்டு வலது இணைக்கணங்களின் பெருக்கம் G-ல் மீண்டும் N-ன் ஒரு வலது இணைக்கணம்.

தேவையான பகுதி

N-ஆனது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என்க.

$$NN = \{ n_1 n_2 \,/\, n_1 \in N, n_2 \in N \} \subset N$$

$$N = Ne \subset NN$$

$$NN = N$$

$a, b \in G$ எனில் அப்போது

$$NaNb = N(aN)b$$
$$= N(Na)b$$
$$= NN(ab)$$
$$= Nab$$

இவ்வாறாக N-ன் இரண்டு வலது இணைக்கணங்களின் பெருக்கம் N-ன் ஒரு வலது இணைக்கணம் ஆகும்.

போதுமான பகுதி

N-ன் இரண்டு வலது இணைக் கணங்களின் பெருக்கம் மீண்டும் N-ன் ஒரு வலது இணைக்கணம் எனக் கொள்வோம்.

$g \in G$ எனில் அப்போது $g^{-1} \in G$.

$\therefore$ Hg மற்றும் Hg^{-1} ஆகியவை G-ல் H-ன் இரண்டு வலது இணைக்கணங்கள். அப்போது $HgHg^{-1}$ ஆனது G-ல் H-ன் ஒரு வலது இணைக்கணம்.

$E = ege g^{-1} \in HgHg^{-1}$

$H = He$ ஆதலால் H-ஐ G-ல் H-ன் ஒரு வலது இணைக்கணம்

$HgHg^{-1} = H$

எனவே $h_1 g h_2 g^{-1} \in H \quad \forall h_1, h_2 \in H$ மற்றும் $g \in G$.

$h_1^{-1}(h_1 g h_2 g^{-1}) \in h_1^{-1} H$

$g h_2 g^{-1} \in H \quad \forall h_2 \in H$.

$\therefore$ H ஆனது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம்.

தேற்றம்

N ஆனது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என்க.

$\frac{G}{N} = \{ Ng \,/\, g \in G \}$ என்க.

$\frac{G}{N}$ ல் $Ng_1 Ng_2 = Ng_1 g_2 \quad \forall g_1, g_2 \in G$ என்றவாறு வரையறை செய்க. இணைக்கணங்களின் பெருக்கலின் கீழ் G/N ஒரு குலம்.

$x, y \in \frac{G}{N}$ எனில் அப்போது சில $g_1, g_2 \in G$-க்கு

$x = Ng_1$ மற்றும் $y = Ng_2$

$xy = Ng_1 Ng_2 = Ng_1 g_2 \in G/N$

$\therefore$ அடைப்பு விதி நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

சேர்ப்பு விதி

x, y, z எனில் அப்போது சில $g_1, g_2, g_3 \in G$-க்கு

$x = Ng_1, \; y = Ng_2, \; z = Ng_3$

$$x(yz) = Ng_1(Ng_2 Ng_3)$$
$$= Ng_1 Ng_2 Ng_3$$
$$= Ng_1(g_2 g_3) \Rightarrow (Ng_1 Ng_2) Ng_3$$
$$= (xy)z$$

சமனி உறுப்பு இருத்தல்

e - ஆனது G-ன் சமனி உறுப்பு எனில் $Ne \in G/N$

$\forall \; Ng \in \frac{G}{N}$, $NgNe = Nge = Ng$ மற்றும் $NeNg = Neg = Ng$.

$\therefore$ Ne ஆனது G/N-ன் சமனி உறுப்பு.

நேர்மாறு இருத்தல்

$Ng \in G/N$ என்க. இங்கு $g \in G$ அப்போது $g^{-1} \in G$ எனவே

$Ng^{-1} \in G/N$.

$$Ng\,Ng^{-1} = Ngg^{-1} = Ne$$

$$Ng^{-1}Ng = Ng^{-1}g = Ne.$$

$\therefore$ Ng^{-1} ஆனது Ng-ன் நேர்மாறு.

வரிசைத் தேற்றம்

G- ஒரு முடிவுள்ள குலம் மற்றும் N ஆனது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம் எனில் $o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)}$.

$$G/N = \{ Ng \,/\, g \in G \}$$

$\therefore$ $o(G/N)$ = G-ல் H-ன் இணைக்கணங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{o(G)}{o(N)}$.

செயல்மாறாக் கோர்த்தல்

வரையறை

$\phi(a * b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ எனில் ϕ என்ற கோர்த்தலை குலம் $(G, *)$ லிருந்து குலம் $(\bar{G}, \cdot)$-க்கான ஒரு செயல்மாறாக்

முன்னுரை

Normal Sub

கோர்த்தல் என்போம். அதாவது G-ன் இரண்டு உறுப்புகளின் பெருக்கத்தின் பிம்பமானது ϕ-ன் கீழ் G-ல் அந்த உறுப்புகளின் பிம்பங்களின் பெருக்கமாகும். இனிமேல் $\phi(a*b) = \phi(a)\cdot\phi(b)$ என்ற சமன்பாட்டை எளிமையாக $\phi(a*b) = \phi(a)\phi(b)$ என எழுதலாம்.

கேர்னல் ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் வரையறை

ϕ என்ற கோர்த்தலை குலம் (G) மீதான e என்ற உறுப்பின் பெருக்கத்தின் பிம்பமானது கணம் $\{x \in G \,/\, \phi(x) = e\}$ என்பது ϕ-ன் கீழ் அந்த உறுப்புகளின் பிம்பங்களின் பெருக்கமாகும். இதனை $Ker\,\phi$ என எழுதலாம்.

(எ.கா) 1

வழக்கமான கூட்டலின் கீழ் G ஆனது முழு எண்கள் Z ஆல் ஆன குலம் என்க. வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் G' ஆனது பூச்சியமற்ற மெய்யெண்கள் $R-\{0\}$ ஆல் ஆன குலம் என்க. $\forall\, m \in Z = G$ க்கு $\phi(m) = 2^m$ என்றவாறு $\phi : G \longrightarrow G'$ ஐ வரையறை செய்தால் அப்போது

$$\forall\, m, n \in Z \text{ க்கு } \phi(m+n) = 2^{m+n}$$
$$= 2^m \cdot 2^n$$
$$= \phi(m)\cdot\phi(n)$$

$\therefore\ \phi$ ஆனது குலம் G யிலிருந்து குலம் G' க்கான ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல்.

Scanned with CamScanner

தேற்றம் :

ϕ ஆனது குலம் G-யிலிருந்து குலம் $\bar{G}$ க்கான ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் என்க. e மற்றும் $\bar{e}$ என்பன முறையே G மற்றும் $\bar{G}$ களின் முற்றொருமை உறுப்புகள் எனில் அப்போது (i) $\phi(e) = \bar{e}$

(ii) $\forall\, a \in G$ க்கு $\phi(a^{-1}) = [\phi(a)]^{-1}$

நிரூபணம்

i) $\phi(e) = \phi(e \cdot e) = \phi(e) \cdot \phi(e)$ —①

$\phi(e) = \phi(e) \cdot \bar{e}$ —②

($\because$ $\bar{e}$ ஆனது $\bar{G}$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு)

① மற்றும் ②-லிருந்து $\phi(e) \cdot \phi(e) = \phi(e) \cdot \bar{e}$

$$\phi(e) = \bar{e}$$

$$\bar{e} = \phi(e) = \phi(a \cdot a^{-1}) = \phi(a) \cdot \phi(a^{-1}) \quad \text{—③}$$

மேலும் $[\phi(a)]^{-1}$ ஆனது $\bar{G}$-ன் $\phi(a)$ ன் நேர்மாறு

ஆதலால் $\bar{e} = \phi(a) \cdot [\phi(a)]^{-1}$ —④

③ மற்றும் ④ லிருந்து நாம் பெறுவது

$$\cancel{\phi(a)} \cdot \phi(a^{-1}) = \cancel{\phi(a)} \cdot [\phi(a)]^{-1}$$

$$\phi(a-1) = [\phi(a)]^{-1}$$

தேற்றம்:

ϕ ஆனது குலம் G யிலிருந்து குலம் $\bar{G}$ க்கு ஒன்றைக் கொண்டான கோர்த்தல் என்றால் மட்டுமே $Ker\,\phi = \{e\}$ இங்கு e என்பது G-ன் முற்றொருமை உறுப்பு

நிரூபணம்

ϕ ஆனது $(1-1)$ என்க.

$a \in K$ என்றால் அப்போது $\phi(a) = \bar{e}$ இங்கு $\bar{e}$ என்பது $\bar{G}$ ன் முற்றொருமை உறுப்பு.

$\phi(a) = \phi(b)$ என்க.

பின்புறமாக $[\phi(b)]^{-1}$ ஆல் பெருக்க நாம் பெறுவது

$$\phi(a) = [\phi(b)]^{-1} = \phi(b)\,[\phi(b)]^{-1}$$

$$\phi(a)\,\phi(b^{-1}) = \bar{e}$$

$$\phi(ab^{-1}) = \bar{e}$$

$$ab^{-1} \in K$$

ஆனால் $ab^{-1} = e$

$$(ab^{-1})b = eb$$

$$a(b^{-1}b) = b$$

$$ae = b$$

$\therefore a = b$

$\therefore \phi$ ஆனது $(1-1)$

மறுதலையாக ϕ ஆனது $(1-1)$ என்க.

$g \in Ker\,\phi$ என்றால் அப்போது $\phi(g) = \bar{e}$

ஆனால் $\phi(e) = \bar{e}$

ஆனால் $\phi(e) = \bar{e}$

$\therefore \phi(g) = \phi(e)$

ஆனால் ϕ ஆனது $(1-1)$

$\therefore K = \{e\}$

வரையறை

ϕ ஆனது $(1-1)$ ஆக இருக்கும்போது குலம் G-யிலிருந்து குலம் $\bar{G}$ க்கான செயல் மாறாக் கோர்த்தல் ϕ ஐ இயல் மாறாக் கோர்த்தல் என்போம்.

தேற்றம்

குலங்களுக்கான முதல் இயல்மாறாக் கோர்த்தலின் தேற்றம்

ϕ ஆனது குலம் G லிருந்து குலம் $\bar{G}$-ன் மீது உட்கரு K உடன் ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் எனில் அப்போது $\frac{G}{K} \simeq \bar{G}$

நிரூபணம்: ϕ ஆனது G லிருந்து $\bar{G}$ ன் மீது உட்கரு K உடன் செயல் மாறாக் கோர்த்தல் என்க.

$\frac{G}{K} = \{Kg \,/\, g \in G\}$ ஆனது துணைக்கணங்களில் பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலம்.

$Kg \in \frac{G}{K}$ க்கு $\psi(Kg) = \phi(g)$ என்றவாறு $\psi\phi \in \psi : \frac{G}{K} \to \bar{G}$ ஐ வரையறை செய்வோம்.

முதலில் ψ ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் என நாம் நிறுவுவோம்.

$Ka, Kb \in \frac{G}{K}$ எனில் அப்போது $\psi(KaKb) = \psi(Kab)$

$$= \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

$$= \psi(Ka).\psi(Kb)$$

$\therefore \psi$ ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல்

ψ ஆனது (1-1) என நிறுவுதல் $Kg \in \ker\psi$ எனில் அப்போது

$\psi(Kg) = \bar{e}$ இங்கு $\bar{e}$ என்பது $\bar{G}$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு

$\therefore \phi(g) = \bar{e}$

$\therefore \quad g \in \ker\phi \quad , \forall g \in K$

$\therefore Kg = K = Ke$

இங்கு e என்பது G-ன் முற்றொருமை உறுப்பு மற்றும் $K = Ke$ என்பது $\frac{G}{K}$ ன் முற்றொருமை உறுப்பு

$\therefore \ker\psi = Ke$

$\therefore \ker\psi$ ஆனது $\frac{G}{K}$-ன் முற்றொருமை உறுப்பை மட்டும் கொண்டுள்ளது

அடுத்து ψ ஆனது மேல் என நாம் நிறுவுவோம்.

$\bar{g} \in \bar{G}$ என்க. ϕ ஆனது மேல் ஆதலால் $\phi(g) = \bar{g}$ என்றவாறு $g \in G$-ல் இருக்கும். அதாவது $\psi(Kg) = \bar{g}$

$\therefore \psi$ ஆனது மேல்

$\therefore \psi$ ஆனது $\frac{G}{K}$ லிருந்து $\bar{G}$-ன் மீதான ஒரு இயல்மாறாக் கோர்த்தல்

$$\therefore \frac{G}{K} \simeq \bar{G}.$$

வரையறை: ϕ ஆனது குலம் G லிருந்து குலம் $\bar{G}$ க்கு ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் எனில் அப்போது ϕ ன் உட்கருவை K அல்லது K_ϕ எனக் குறித்து $K = \{g \in G \,/\, \phi(g) = \bar{e}\}$ என வரையறுக்கலாம். இங்கு $\bar{e}$ என்பது $\bar{G}$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு.

பாடம் - 5

வளையங்களின் செயல்மாறாக் கோர்த்தல்:

வரையறை: $(R,+,\cdot)$ மற்றும் $(R',+,\cdot)$ என்பன இரண்டு வளையங்கள் என்க.

(i) $f(a+b) = f(a)+f(b)$

(ii) $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)\ \forall\, a,b \in R$ எனில் R லிருந்து R'-க்கான கோர்த்தல் f ஐ ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் என்போம்.

(i), (ii)-ன் இடது கை பக்கத்தில் காணப்படும் $+,\cdot$ R ல் ஈரிணைச் செயலிகள் மற்றும் (i), (ii) வலது கை பக்கத்தில் காணப்படும் $+,\cdot$ R'-ல் ஈரிணைச் செயலிகள்.

துணைத்தேற்றம்:

f ஆனது $(R,+,\cdot)$ என்ற வளையத்திலிருந்து $(R',+,\cdot)$ என்ற வளையத்திற்கு ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் எனில் அப்போது

(i) $f(0)=0$

(ii) $f(-a) = -f(a)\ \forall\, a\in R$.

(i) ல் இடது கைபக்கத்தில் உள்ள பூச்சியமானது R-ல் கூட்டலின் கீழ் முற்றொருமை மற்றும் வலது கை பக்கத்தில் உள்ள பூச்சியமானது R'-ன் கூட்டலின் கீழ் முற்றொருமை.

நிரூபணம்:

1. $f(0) = f(0+0)$

$= f(0)+f(0)$ [f ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் ஆதலால்]

மேலும் $f(0) = f(0)+0$

$\cancel{f(0)} = 0$ (இடது அடித்தல் விதிப்படி)

2. $a \in R$ என்க

$f(a) + [-f(a)] = 0$ மேலும்

$f(a) + f(-a) = f(a-a) = f(0) = 0$ (1-ன் படி)

$\therefore f(a) + f(-a) = f(a) + [f(-a)]$

$\therefore f(-a) = -f(a)$

வரையறை:

வளையம் $(R, +, \cdot)$ லிருந்து மற்றொரு வளையம் $(R', +, \cdot)$க்கு உள்ள ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் f எனில் அப்போது $\{ r \in R : f(r) = 0 \}$ என்ற கணத்தை f-ன் உட்கரு என்போம். இதனை $\ker f$ அல்லது $I(f)$ எனக் குறிப்போம்.

$$\therefore \ker f = \{ r \in R \,/\, f(r) = 0 \}$$

எடுத்துக்காட்டு-1

n என்பது ஒரு மிகை முழு எண் எனில்

$k \mapsto$ ~~k mod n~~ $k \to k \bmod n$ என்பது Z லிருந்து Z_n மேலும் ஒரு வளைய செயல் மாறாக் கோர்த்தல் ஆகும். இந்தக் கோர்த்தல் ஒரு Z லிருந்து Z_n க்கு மேலும் செயல் மாறாக் கோர்த்தல்.

அதாவது $\langle Z, +, \cdot \rangle$ மற்றும் $\langle Z_n, +_n, \cdot_n \rangle$ என்பன இரண்டும் வளையங்கள் ஆகும்.

$\phi : Z \to Z_n$ என்பது

$\phi(x) = x \bmod n \quad \forall\, x \in Z$

இக x மற்றும் y என்பன Z உள்ளது எனக்கொள்வோம்

நாம் நிறுவவேண்டியவை,

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$

2. $\phi(xy) = \phi(x) . \phi(y)$

1. $\phi(x+y) = (x+y) \bmod n$

$= (x \bmod n + y \bmod n) \bmod n$

$= x \bmod n + y \bmod n$

$= \phi(x) + \phi(y)$

2. $\phi(xy) = (xy) \pmod n$

$= [(x \bmod n)(y \cdot \bmod n)] \bmod n$

$= x \bmod n \cdot y \bmod n$

$= \phi(x) \cdot \phi(y)$

$\therefore$ எனவே ϕ என்பது ஒரு வளைய செயல்மாறாக் கோர்த்தலாகும்.

எடுத்துக்காட்டு -2

$a+ib$ லிருந்து $a-bi$ க்கு செல்லும் ஒரு வளைய இயல்மாறாக் கோர்த்தலானது சிக்கலெண்களிலிருந்து சிக்கலெண்களுக்கு செல்லும் ஒரு வளைய இயல்மாறாக் கோர்த்தலாகும்.

$\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ என்பது ஒரு வளையமாகும்.

$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$\phi(a+ib) = a - ib$ இங்கு $a, b \in R$

$\phi(z) = \bar{z}$ அதாவது $z = a+ib \in \mathbb{C}$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ அதாவது $z_1 = a+ib$

$z_2 = c+id$

நாம் நிறுவவேண்டியது

1. $\phi(z_1 + z_2) = \phi(z_1) + \phi(z_2)$
2. $\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2)$

1. $\phi(z_1+z_2) = \phi(a+ib+c+id)$

$= \phi\,(a+c)+i(b+d)$

$= (a+c) - i(b+d)$

$= a-ib + c-id$

$\phi(z_1+z_2) = \phi(z_1) + \phi(z_2)$

2. $\phi(z_1 \cdot z_2) = \phi\,[(a+ib)(c+id)]$

$= \phi(ac - bd + iad + ibc)$

$= ac - bd - i(ad+bc)$

$= ac - bd - iad - ibc$

$= ac - iad - bd - ibc$

$= a(c-id) - ib(c-id)$

$$= (a-ib)(c-id)$$

$$\phi(z_1 \cdot z_2) = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2)$$

∴ ϕ என்பது ஒரு வளைய செயல்மாறாக் கோர்த்தலாகும்.

வளைய செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் பண்புகள் :

ϕ என்பது R லிருந்து S க்கு செல்லும் ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தலாகும். A என்பது வளையம் R-ல் உள்ள உள்வளையமாகும். மற்றும் B என்பது S-ல் உள்ள ஓர் சீர் வளையமாகும்.

பண்பு-1

r என்பது வளையம் R-ல் உள்ளதாகும். n என்பது ஒரு மிகை முழு எண் என்றால்,

$$\phi(nr) = n\phi(r)$$

and

$$\phi(r^n) = (\phi(r))^n$$

நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்ட $\phi : R \to S$ என்பது ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தல்.

இங்கு $2+2+2+2 = 4(2)$

$4+4+4+4+4 = 5(4)$

என்பது நாம் அறிந்ததே.

இதே போல.

$$\phi(nr) = \phi(r+r+r+\dots+r) \text{ n முறை}$$

$$= \phi(r)+\phi(r)+\phi(r)+\dots+\phi(r) \text{ n முறை}$$

$$\therefore \phi(nr) = n\phi(r)$$

அடுத்ததாக,

$$\phi(r^n) = [\phi(r)]^n$$

நிரூபணம்: $\phi(r^n) = \phi(r \times r \times r \times \dots \times r)$ (n முறை)

$= \phi(r) \times \phi(r) \times \phi(r) \times \dots \times \phi(r)$ (n முறை)

$$\phi(r^n) = [\phi(r)]^n$$

பண்பு-2

$\phi(A) = \{\phi(a) : a \in A\}$ என்பது வளையம் S-ன் உள் வளையமாகும்.

நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்ட $\phi : R \to S$ என்பது ஓர் செயல்மாறாக் கோர்த்தலாகும். A என்பது வளையம் R-ன் உள்வளையமாகும்.

நாம் நிறுவவேண்டியது, $\phi(A)$ என்பது வளையம் S-ன் உள்வளையமாகும்.

அதாவது $\phi(A) = \{\phi(a) : a \in A\}$

$\phi(A)$ என்பது ஒரு உள்வளையம் என நாம் நிறுவவேண்டும்.

அதற்கு நாம்,

1. $\phi(A)$ என்பது வெற்று இல்லை.
2. $a', b' \in \phi(A)$ எனில் $\Rightarrow a' - b' \in \phi(A)$ ஆகும்.
3. $a', b' \in \phi(A)$ எனில் $\Rightarrow a'b' \in \phi(A)$ ஆகும்.

நாம் அறிந்தபடி ϕ இன் A என்பது ϕ லிருந்து A க்கு கோர்த்தலாகும்.

$$\Rightarrow \phi(0) = 0'$$

$\Rightarrow \phi(A)$ என்பது $0'$ ஐ உள்ளடக்கியது.

$\Rightarrow \phi(A)$ என்பது வெற்று இல்லை

எனவே $\phi(A) \subseteq S$ —— ①

2. $a', b' \in \phi(A)$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\phi : R \to S \quad \exists\, a, b \in A$$

ஆகவே $\phi(a) = a', \quad \phi(b) = b'$

$$a' - b' = \phi(a) - \phi(b)$$

$$= \phi(a-b)$$

$$\in (A)$$

(ஏனெனில் $a \in A$, $b \in A$ என்றால் A என்பது $a-b \in A$ எனில் A என்பது வளையம்)

$\therefore a' - b' \in \phi(A)$

3. $a', b' \in \phi(A)$

$\Rightarrow$ a மற்றும் b என்பது

$$\phi(a) = a'$$

$$\phi(b) = b'$$

$$\therefore \phi(a'b') = \phi(a)\,\phi(b)$$

$$= \phi(ab)$$

($\because$ A என்பது சீர்வளையம்)

$$\therefore \phi(a'b') \in \phi(A)$$

வளைய செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் மற்ற பண்புகளாவன.

* A என்பது ஒரு சீர்வளையமாகில் மற்றும் ϕ என்பது S-ன் மேல்கோர்த்தல் (onto) எனில் $\phi(A)$ என்பது ஓர் சீர்வளையமாகும்.

* $\phi^{-1}(B) = \{r \in R \mid \phi(r) \in B\}$ என்பது வளையம் R-ன் சீர் வளையமாகும்.

* வளையம் R என்பது பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டால் $\phi(R)$ என்பதும் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டதாகும்.

* வளையம் R என்பது ஓரலகு எனில் $S \neq \{0\}$ மற்றும் ϕ என்பது onto எனில் $\phi(1)$ என்பதும் ஓரலகு ஆகும் (S-ன்)

* ϕ என்பது இயல்மாறாக் கோர்த்தல் எனில். ϕ என்பது onto மற்றும் $\ker\phi = \{r \in R \mid \phi(r) = 0\} = 0$.

* ϕ என்பது R லிருந்து S க்கு செல்லும் இயல்மாறாக் கோர்த்தல் எனில் ϕ^{-1} என்பது S லிருந்து R-க்கு செல்லும் இயல்மாறாக் கோர்த்தலாகும்

இந்த அனைத்துப் பண்புகளின் நிரூபணங்களும் செயல்மாறாக்கோர்த்தலின் நிரூபணங்களின் (பண்புகள்) மேற்கோளின் படி நிறுவப்பட்டுள்ளது

தேற்றம்:

ϕ என்பது வளையம் S ன் ஒரு செயல்மாறாக் கோர்த்தலாக இருந்தால், $\ker\phi = \{r \in R / \phi(r) = 0\}$ என்பது வளையம் R-ன் சீர்வளையமாகும்.

தேற்றம்: வளையங்களுக்கான முதல் செயல்மாறாக் கோர்த்தல் தேற்றம்.

ϕ என்பது வளையம் R-லிருந்து வளையம் S க்கு செல்லும் செயல்மாறாக்கோர்த்தல் எனில். $R/\ker\phi$ லிருந்து $\phi(R)$ செல்லும் ஒரு கோர்த்தல் ஒரு இயல்மாறாக் கோர்த்தலாகும்.

அதாவது $r + Ker\phi \rightarrow \phi(r)$ என்பது ஓர் இயல்மாறாக் கோர்த்தல் குறிப்பிடுதல்,

$$R / Ker\phi \approx \phi(R).$$

தேற்றம்:

வளையம் R என்பது அலகு உறுப்பு e ஐக் கொண்ட ஆரம்ப வளையம். ϕ என்பது Z லிருந்து R க்கு செல்லும் ஒரு வளைய செயல்மாறாக் கோர்த்தல் ஆகும். இங்கு $n \rightarrow ne$ என்பதும் வளைய செயல்மாறாக் கோர்த்தல் ஆகும்.

நிரூபணம்:

தரப்பட்ட கோர்த்தலானது $\phi : Z \rightarrow R$ and $n \rightarrow ne$.

$$\therefore \phi(n) \rightarrow ne.$$

m மற்றும் n என்பது Z-ல் உள்ளதாக கொண்டு தேர்க்கண்ட செயல்மாறாக்கோர்த்தல் கூட்டலுக்கு மாறாதது என அறியவேண்டும். இதனை நான் மூன்று நிலைகளில் நிறுவலாம்.

நிலை-1 m மற்றும் n என்பவைகளை மிகை எண்களாக கருதினால்

i.e $m \geq 0$ மற்றும் $n \geq 0$

பிறகு,
$$\phi(m+n) = (m+n)e$$
$$= e+e+e+\cdots+e \quad ((m+n) \text{ முறை})$$
$$= (\underbrace{e+e+e+\cdots e}_{m \text{ முறை}}) + (\underbrace{e+e+e+\cdots+e}_{n \text{ முறை}})$$
$$= me + ne$$
$$\therefore \phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n)$$

நிலை - ii

இங்கு m மற்றும் n ஆகியவைகளை குறை எண்களாக எடுத்துக் கொண்டால்..

(i.e) $m < 0$ மற்றும் $n < 0$.

எனவே,

$$\phi(m+n) = (m+n)e$$
$$= (-m-n)(-e)$$
$$= (-m)(-e) + (-n)(-e)$$
$$= me + ne$$
$$\phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n)$$

நிலை - iii

இப்போது m மற்றும் n ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றை மிகையாகவும் மற்றொன்றை குறை எண்ணாகவும் கருதுவோம்.

(i.e) $m > 0$, $n < 0$

(i.e) $\Rightarrow$ $$\phi(m+n) = (m+n)e$$
$$= \underbrace{(e+e+\dots+e)}_{m \text{ முறை}} - \underbrace{(e+e+\dots+e)}_{n \text{ முறை}}$$
$$= me + (-n)(-e)$$
$$= me + ne$$
$$\phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n)$$

எனவே ϕ என்பது கூட்டலுக்கு ஒப்புமை மாறாக் கோப்பாகும்.

Scanned with CamScanner

ϕ என்பது பெருக்கலைப்பொறுத்து ஒரு செயல்மாறாக் கோத்தல் என நிறுவவேண்டும். இதனை நாம் ஒரு நிலையிலே நிறுவ இயலும்

i.e. $(ma)(nb) = (mn)(ab)$

இங்கு m மற்றும் n ஆகியவை ஒரு எண்கள் ஆகும்.

ஆகவே, $\phi(mn) = (mn)e$

$= (me)(ne)$

$= \phi(m)\phi(n)$

$\therefore$ ϕ என்பது பெருக்கலைப்பொறுத்தும் ஒரு செயல்மாறாக்கோத்தல் என நிறுவப்பட்டது.

ஈ.வக்களம்

வரையறை (களம்)

ஒரு வெற்றற்ற கணம் F ஆனது $+$ மற்றும் $\cdot$ என்ற இரண்டு ஈ.நிலைச் செயல்களுடன் பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றினால் அதனை ஒரு களம் என்போம்.

1. $(F, +)$ ஒரு ஏபீலியன் குலம்.
2. $(F-\{0\}, \cdot)$ ஒரு ஏபீலியன் குலம்.
3. $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad \forall\, a,b,c \in F$ (இடது பங்கீட்டு விதி)

தேற்றம்:

D என்பது ஓர் எண் அரங்கம் என்க. F என்பது ஓர் களமாகும் (அதாவது எண் அரங்கம் D-ன் ஓர் களம் ஆகும்) இந்த F உள்ளடக்கிய ஒரு உள்வளையம், எண் அரங்கம் D க்கு ஒரு இயல்பான கோர்த்தல் ஆகும்.

நிரூபணம்:

இங்கு S என்பதை உள்வளையமாக கொள்வோம். இந்த உள்வளையத்தின் அமைப்பானது $\frac{a}{b}$ ஆகும். இங்கு $a, b \in D$ மற்றும் $b \neq 0$.

S-க்கான ஓர் சமான தொடர்பை $\equiv$ என வரையறுத்துக்கொள்வோம்.

i.e $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$

எனில் $ad = bc$

F என்பதை S ன் சமான தொடர்பாக கொண்டால்

$\frac{x}{y}$ ஐ $\left[\frac{x}{y}\right]$ எனக் கொள்வோம்.

F ஐ நாம் கூட்டலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் வரையறை செய்வோம்.

i.e $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[(ad+bc)/bd\right]$

and $\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] = \left[ac/bd\right]$

இங்கு D என்பது ஓர் எண் அரங்கம் என்பதால் அது பெருக்கலுக்கான நிரூபணத்தை நிறைவு செய்கிறது.

(ie) $bd \neq 0$ எப்போதும் $b \neq 0$

and $d \neq 0$.

நாம் + ஆனது இரு நிரயல்களின் நன்கு வரையறை செய்ய வேண்டியவை, அதாவது

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a'}{b'}\right]$$

மற்றும் $\left[\frac{c}{d}\right] = [c'/d']$

எனவே $ab' = a'b$ மற்றும் $cd' = c'd$.

இதை கொண்டு,

$$\begin{aligned}(ad+bc)\,b'd' &= adb'd' + bcb'd \\ &= (ab')dd' + (cd'bb') \\ &= (a'b)dd' + (c'd)bb' \\ &= (a'd'bd + b'c'bd) \\ &= (a'b' + b'c')bd.\end{aligned}$$

வரையறையின் படி

$$[(ad+bc)/bd] = [(a'd'+b'c')/b'd']$$

எனவே கூட்டலுக்கான வரையறை நிறுவப்பட்டது.

அடுத்தாக,

1 என்பது எண் பெருக்கத்திற்கான சமனி (அலகு) ஆகும்.

எனவே $[0/1]$ என்பது F-ன் கூட்டல் சமனி ஆகும்

$\Rightarrow$ $[a/b]$-ன் கூட்டல் நேர்மாறு $[-a/b]$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ $[a/b]$-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு $[b/a]$ ஆகும்.

இறுதியாக $\phi : D \to F$ என்ற கோர்த்தலானது, கொடுக்கப்பட்ட $x \to [x/1]$ என்பதை எண் அரங்கம் D லிருந்து $\phi(D)$ க்கு மேலும் ஒரு இயல்மாறாக் கோர்த்தல் என நிறுவனம் செய்கிறது.