SEMESTER : **V**
CORE COURSE : **IX**

Inst Hour	**: 6**
Credit	**: 5**
Code	**: 18K5M09**

REAL ANALYSIS

UNIT 1.

Real Number system – Field axioms –Order relation in R. Absolute value of a real number & its properties –Supremum & Infimum of a set– order completeness property – countable & uncountable sets

(Chapter 1: Sections 2-7&10 of Text Book 1)

UNIT 2:

Continuous functions – Limit of a Function – Algebra of Limits – Infinite Limits– Continuity of a function – Types of discontinuities – Elementary properties of continuous functions –Uniform continuity of a function.

(Chapter 5: of Text Book 1)

UNIT 3:

Differentiability of a function– Derivability & continuity –Algebra of derivatives –Inverse Function Theorem – Daurboux's Theorem on derivatives.

(Chapter 6: Sections1-5 of Text Book 1)

UNIT 4:

Rolle's Theorem –Mean Value Theorems on derivatives– Taylor's Theorem with remainder- Power series expansion .

(Chapter 7: Sections 1-6 of Text Book 1)

UNIT 5:

Riemann integrability and integral of a bounded function over finite domain – Darboux's theorem –Another equivalent definition of Integrability and Integral – conditions for integrability – Particular classes of bounded Integrable functions - Properties of Integrable functions – Functions defined by Definite Integrals– First Mean Value Theorem of Integral Calculus – Change of variable in an Integral- Integration by parts.

(Chapter 6 of Text Book 2)

Text Book(s)

[1] M.K,Singhal & Asha Rani Singhal, A First Course in Real Analysis , R. Chand & Co June 2013

[2] Shanthi Narayan, A Course of Mathematical Analysis. 1964

Books for Reference

[1] Tom.M.Apostol, Mathematical Analysis ,II Edition.

[2] S.C.Malik , Elements of Real Analysis.

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

Verified,
1. M. Lakshmi
2. D. [illegible] 15/2/19

UNIT – III – வகையிடுதல்.

தேற்றம் : 3.1

சார்பு f என்பது இடைவெளி I ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்றும் I ல் ஒரு புள்ளி x_0 இடத்து அவற்றுக்கு வகைக்கெழு உண்டென்றும் c என்பது ஒரு மெய்யெண் என்றும் கொண்டால் cf என்பவையும் வகைக்கெழு காணத்தக்கவையே என நிறுவு.
$(fc)'(x_0) = c[f'(x_0)]$.

நிறுவல் :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad [\text{வரையறையின் படி}]$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{c \cdot f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right\},$$

$$= c \cdot \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right\}$$

$$= cf'(x_0).$$

எனவே $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ என நிறுவப்பட்டது.

தேற்றம் : 3.2.

சார்புகள் f, g என்பவை இடைவெளி I ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்றும் I ன் ஒரு புள்ளி x_0 இடத்து அவற்றுக்கு வகைக்கெழுக்கள் உண்டென்றும் கொண்டால் $f+g$ என்பவையும் இடத்து வகைக்கெழு காணத்தக்கவையே மேலும் $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$ என நிறுவுக.

நிரூபணம் :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)] + [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} + \frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \right\}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$= f'(x_0) + g'(x_0)$ இருக்கின்றன.

$\therefore f'(x_0) + g'(x_0)$.

$\therefore (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. என நிரூபிக்கப்பட்டது.

இதே போன்று $(f-g)'x_0 = f'(x_0) - g'(x_0)$ என நிறுவ முடியும் என நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 3.3 :

சார்புகள் f, g என்பன இடைவெளி I ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன என்றும் I ன் ஒரு புள்ளி x_0 இடத்து அவற்றுக்கு வகைக்கெழுக்கள் உண்டென்றும் ~~tx~~ f/g கொண்டால் fg என்பவையும் இடத்து வகைக்கெழு காணத்தக்கவையே. மேலும் $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$ என நிறுவுக.

நிறுவல் :-

$$\lim_{x \to x_0} \frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x)\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) + g(x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)\right]$$

f ஆனது x_0 இல் தொடர்ச்சியாய் உள்ளதால் x_0 இல் $f'(x_0)$ வகைக்கெழு இருக்கிறது.

$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ மேலும் $\lim_{x \to x_0} g(x_0) = f(x_0)$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[f(x)\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) + g(x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x)\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) + \lim_{x \to x_0} g(x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0}\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) + \lim_{x \to x_0} g(x_0) \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0).$$

$\therefore (fg)'(x_0) = f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0)$ என

நிறுவப்பட்டது.

தேற்றம்: 3.4.

f என்ற சார்பு x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது என்றும் $f(x_0) \neq 0$ என்றும் கொண்டால் சார்பு $1/f$ ஆனது x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது என்று நிறுவுக. மேலும் $(1/f)'(x_0) = -f'(x_0)/\{f(x_0)\}^2$ என்றும் நிறுவுக:-

நிறுவல்:

சார்பு f ஆனது x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது என்க. மற்றும் $f(x_0) \neq 0$ என்றும் கொள்க.

$$\frac{1/f(x) - 1/f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x_0)} \longrightarrow (1)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \longrightarrow (2)$$

f என்ற சார்பு தொடர்ச்சியான சார்பு என்பதால்

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0 \longrightarrow (3)$$

இங்கு பெருக்கலுக்கான எல்லை விதியை சமன் (1), (2)&(3) ஆனது $\lim_{x \to x_0} \frac{1/f(x_0) - 1/f(x_0)}{x - x_0}$ மதிப்பு பெறும். மேலும் இந்த மதிப்பு ஆனது $-f'(x_0)/\{f(x_0)\}^2$ எனப் பெறப்படும்.

தேற்றம் : 3.5

சார்புகள் f, g என்பவை I என்ற ஒரு திறந்த இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. மேலும் இச்சார்புகள் I என்ற திறந்த இடைவெளியில் x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது என்றும் $g(x_0) \neq 0$ என்றும் கொண்டால் f/g ஆனது வகையிடத்தக்கது என நிறுவு.

நிறுவல் — தேற்றம் 3.3 & 3.4 ஐ பயன்படுத்துக.

தேற்றம் 3.6 <u>சங்கிலி விதி</u>

சார்புகள் f, மற்றும் g ஆனது தொடர்ச்சியான சார்புகள் ஆகும். மேலும் சார்பு f ன் வீச்சுஎல்லை g என்றும், f, x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது என்றும் சார்பு g-ம் $f(x_0)$ என்ற புள்ளி புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது என்வும் கொண்டால் $g \circ f$, ~~வக~~ x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது என்று நிறுவு மேலும் $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f(x_0)$ என்றும் நிறுவுக.

நிறுவல்:-

சார்பு f ன் வீச்சுஎல்லை ஆட்களம் g என்றால் $g \circ f$ ன் ஆட்களம் f ஆகும்.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0)}{h} = g'(f(x_0)) . f(x_0)$$

இங்கு F & G என்பது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள -து.

$$F(h) = \begin{cases} \dfrac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} & , f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0 \\ g'(f(x_0)) & , \text{if } f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \end{cases}$$

மற்றும் $G(h) = \dfrac{(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0)}{h}$.

$$F(h) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow (1) \quad h \neq 0.$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = 0.$$

ஆனால் f ஆனது வகையிடத்தக்கது x_0 என்ற புள்ளியில்

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

இதிலிருந்து நாம் $\lim_{h\to 0} F(h) = g'(f(x_0))$ என நிரூபிக்கலாம் பெறுவோம். இங்கு $\lim_{h\to 0} G(h) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. தேற்றுவிப்பதற்கு நாம் $\lim_{k\to 0} \dfrac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{k} = g(f(x_0))$ என நாம் காண்போம். இங்கு $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ எனக் கொண்டால் $0 < |k| < \delta$ என்க.

$$\left| \frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{k} - g'(f(x_0)) \right| < \epsilon \rightarrow (2)$$

மேலும் f என்பது x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது ஆகும்.
எனவே $\delta' > 0$ என்க f ஆனது தொடர்ச்சியானது ஆகும் x_0 என்ற புள்ளியில்;

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \delta \rightarrow (3)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) \text{ எனில் } |F(h) - g'(f(x_0))| = 0 < \epsilon \rightarrow (4)$$

$$F(h) = \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

$$= \frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{k}.$$

$$|F(h) - g'(f(x_0))| < \epsilon \text{ எனில் } |k| < \delta \rightarrow (5)$$

$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \delta$. மேலும் $|h| < \delta'$ என்பது

$$|F(h) - g'f(x_0)| < \epsilon.$$

ie, $\lim_{h \to 0} F(h) = g'(f(x_0))$. தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

4. தேற்றம் 4: ஒரு சார்பின் எதிர்மறை வகைக்கெழு காண்க:-

நிறுவல்: F என்பது ஓர் இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்ச்சியான சார்பு. மேலும் f என்பது இந்த இடைவெளியில் அமைந்த x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்க சார்பு மற்றும் $f(x_0) \neq 0$ எனில் fன் தலைகீழ் சார்பானது x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்க சார்பு ஆகும்.

மேலும், அப்புள்ளியில் அதன் வகைக்கெழு $1/f'(x_0)$ ஆகும். ⑨

நிறுவல் :-

$$x \to y \to g(y) = x$$
$$x_0 \to y_0 \to g(y_0) = x_0$$
$$x_0+h \to y_0+k \to g(y_0+k) = x_0+h$$

மதிப்புகள் விசைகள்.

g என்ற சார்பின் மதிப்புகள் x என்றும் அதன் விசைகள் y என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

($\because$ g என்பது f ன் தலைகீழ் சார்பு)

$g(x_0) = 1/f(x_0)$

$\therefore$ y ன் மதிப்பாகவும் y யாகவும் அதன் விசை x ஆகவும் $f(x) = y \Rightarrow g(y) = x$ என அமையும்.

$f(x_0) = y_0$ என்க.

$g(y_0) = x_0$ ஆகும்.

இப்பொழுது y ல் $y+k$ என்பது y லிருந்து வேறுபட்ட ஒரு புள்ளி என்க. f என்பது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு என்பதால் அதன் தலைகீழ் சார்பு g யுடன் ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும்.

x ல் x_0+h என்ற நேர்மைதன்மை வாய்ந்த புள்ளி -யானது அதிலிருந்து வேறுபட்ட புள்ளியாக $f(x_0+h) = y_0+k$ எனப்படி அமையும்.

$$\Rightarrow f(x_0) = y_0$$
$$\Rightarrow f(x_0+h) = y_0+k$$
$$\Rightarrow g(y_0) = x_0 \text{ ஆகும்}$$
$$\Rightarrow g(y_0+k) = x_0+h.$$

இப்போது $k \to 0$ எனும்போது $h \to 0$ என கிடைக்கிறோம்.

f என்பது x_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்க சார்பு.

f என்பது x_0 என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்பு f ன் நேர்மாறு சார்பு g ஆனது y_0 என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்பாகும். தொடர்ச்சியான சார்பின் வரையறையின்படி

$$\lim_{k \to 0} g(y_0+k) = g(y_0)$$

$$\lim_{k \to 0} g(y_0+k) = \lim_{k \to 0} g'(y_0) \Rightarrow \lim_{k \to 0} (x_0+h-x_0) = 0.$$

$\lim_{k \to 0} h = 0 \; \therefore k \to 0 \Rightarrow h = 0.$ மேலும் g என்பது $f(x_0)$ என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்க சார்பு என நிறுவுவோம்.

$$= \frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k} = \frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{y_0+k-y_0}.$$

$$= \frac{x_0+h-x_0}{y_0+k-y_0} = \frac{1}{\frac{(y_0+k-y_0)}{h}}$$

$$= \lim_{k \to 0}\left[\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}\right] = \left[\frac{1}{\lim_{k \to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))}{h}}\right]$$

$\therefore g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ பெறுவது என்.

$\therefore$ ~~எனவே~~ $g'(x_0)$ என்பது y_0 என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்க சார்பாகும். மேலும் அதன் வகைக்கெழு $\frac{1}{f'(x_0)}$ ஆகும். தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

5. டார்பாக்ஸின் தேற்றம்

தேற்றம் 5.1

வகையிடத்தக்க டார்பாக்ஸின் தேற்றம் $[a,b]$ல் f என்பது வரையறுக்கப்பட்ட வகையிடத்தக்க சார்பு. மேலும் $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ எனில் a க்கும் b க்கும் இடையே c என்ற ஒரு மெய்யெண் உள்ளது $f'(c) = 0$ என்றவாறு அமையும்.

நிறுவல்: வகை (i) $f'(b) > 0$ என்க.

படி (i):- $f'(a) < 0$ எனில், $h_1 > 0 \ni : f(x) < f(a) \ \forall x \in]a, a+h_1[$.

f வகையிடத்தக்க சார்பு ஆகும் a என்ற புள்ளியில்.

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a), \quad \epsilon = -f'(a), \ h_1 > 0 \ni :$$

$a < x < a+h$ எனில் $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \epsilon$ என்க.

i.e., $f'(a) - \epsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a) + \epsilon$.

$f'(a) + \epsilon = 0$ & $x > a$, $\therefore f(x) < f(a)$

படி (ii):- $f'(b) > 0$ என்க. $\exists \ h_2 > 0 \ni : f(x) < f(b) \ \forall x \in]b-h_2, b[$

f ஆனது b என்ற புள்ளியில் வகையிடத்தக்கது ஆகும்.

$$\therefore \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b). \quad \epsilon = f'(b) \Rightarrow h_2 > 0 \ni :$$

$b - h_2 < x < b$, எனில் $\left| \frac{f(x) - f(b)}{x - b} - f'(b) \right| < \epsilon$.

ie $f'(b) - \epsilon < \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < f'(b) + \epsilon$.

$\therefore f'(b) - \epsilon = 0$ & $x < b$, $\therefore f(x) < f(b)$.

படி :(iii)

$[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் சார்பு f ஆனது வகையிடத்தக்கது எனில். f ஆனது தொடர்ச்சியானதும் ஆகும்.

படி (iv): $f'(c) \ngtr 0$, $f'(c) > 0$ எனின் $Lf'(c) > 0$ மற்றும்
படியின் உண்மை போதே $h_3 > 0 \ \exists : f(x) < f(c) \ \forall x \in]c-h_3, c[$
பேறும் இங்கு அங்கு $f(c)$ infimum என்பதற்கு முரணாக
உண்மை. எனவே $f'(c) \ngtr 0$.

<u>படி (v)</u>:- $f'(c) \nless 0$, $f'(c) < 0$ எனின் $Rf'(c) < 0$ ∴ படி ii ல்
உண்மை போதே $h_4 > 0$, $f(x) < f(c) \ \forall x \in]c, c+h[$.
எனவே $f'(c) \nless 0$.

<u>படி (vi)</u>: மேற்கூட்டு விதிப்படி படி 4 & படி 5 ல் $f'(c) = 0$.

<u>வகை (ii)</u> $f'(a) > 0$ ∴ $f'(b) < 0$, ∴ $f'(a) f'(b) < 0$.
(a, b) ல் g என்பது ஓர் சார்பு $g(x) = -f'(x)$ என்க.

∴ $g(a) = -f'(a)$

∴ $g(b) = -f'(b)$

∴ $g(a) - g(b) < 0$.

தற்போது $g(x)$ என்பது (a, b) ல் வரையறுக்கப்பட்ட
வகையிடத்தக்க சார்பு பேறும் $g(a) - g(b) < 0$ ஆகும்படி
அமைகின்றது. $-f'(c) = 0$, $f'(c) = 0$.

தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

ரோலின் தேற்றம் :-

தேற்றம் : 4.1 f என்பது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்பு f என்பது $]a,b[$ வகையிடத்தக்க சார்பு $f(a) = f(b)$ எனும்படி f என்பது $[a,b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு எனில் aக்கும் bக்கும் இடையே c என்ற ஒரு மெய்யெண் ஆனது $f'(c)=0$ எனும்படி அமையும்.

நிரூபணம் :-

மூடிய இடைவெளியில் அமைந்த ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான சார்புகள் அந்த இடைவெளியில் வரம்புடைய சார்பு என நமக்குத் தெரியும். (M, m) என்பவை (a,b)ல் Fன் மீப்பெரு, மீச்சிறு வரம்புகள் என்க.

வகை (i):- $M=m$ என்க. $\therefore (a,b)$ல் f ஒரு மாறிலி சார்பாகும். (a,b)ல் உள்ள எல்லா xகளுக்கும் $f'(x)=0$ ஆகும். எளிதாக a, bல் அமையும் c என்ற புள்ளியில் $F'(c)=0$ ஆகும்.

வகை :(ii) $M \neq m$ என்க. $f(a)=f(b)$ என்பதால் M, m இவற்றுள் ஏதாவது ஒன்று $f(a)$லிருந்து வேறுபடுவதாக இருக்கும். எனவே $F(a) \neq M$ என்க.

மூடிய இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான சார்பும் அதன் மீப்பெரு மதிப்பை அந்த மூடிய இடைவெளியில் ஏற்க வேண்டும் என்பதால் (a,b)ல் c என்ற இடைவெளியில் $f(c)= M$ எனும்படி அமையும்.

$f(a) \neq M \neq f(b)$

$\Rightarrow f(a) \neq f(c) \neq f(b) \Rightarrow a \neq c \neq b.$

$c = a, c = b.$

c என்பது a, b ல் அமைகிறது. (a, b)ல் அமைந்த அனைவரு x களுக்கும் $f(x) \leq f(c)$ ஆகும். சிறியதாக $x = c - h$ என்று எடுத்துக்கொ

$f(c-h) \leq f(c)$ $\quad \therefore f(c-h) - f(c) \leq 0.$

$\dfrac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0.$ $\quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0$

$L f'(c) \geq 0 \longrightarrow (1)$ $\quad x = c + h$ எனில்.

$f(x) \leq f(c)$

$\Rightarrow f(c+h) \leq f(c) \Rightarrow \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c-h) - f(c)}{h} \leq 0. \quad = R f'(c) \leq 0 \longrightarrow (2)$

(1) & (2) லிருந்து f என்பது c ல் வகையிடத்தக்க சார்பாகும்.

$L f'(c) = R f'(c) = f'(c) \longrightarrow (3)$

(1), (2) & (3) லிருந்து $f'(c) = 0$ ஆகும்.

$M \neq f(b)$ என எடுத்துக் கொண்டாலும் $f'(c) = 0$ என்று அமையும்.

தேற்றம் : 2.1 லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்பு தேற்றம்

தேற்றம்: (i) [a, b]ல் f என்பது ஒர் தொடர்ச்சியான சார்பு (ii)]a, b[ல் f என்பது ஒர் வகையிடத்தக்க சார்பு எனில்]a, b[ல் c என்ற மெய்யெண் ஆனது $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ என்பது அமையும்.

நிரூபணம்:-

[a, b]ல் உள்ள x களுக்கும் $F(x) = f(x) + Ax = I$ என எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு A என்பது உகந்த முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டிய மாறிலி $\longrightarrow (1)$

(i) கொள்கையின் படி $f(x)$ என்பது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்பு

$x \to Ax$ என்பது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்பு.

$f(x)+Ax$ என்பதும் $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்பு.

$f(x)$ என்பது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்பு.

(ii) கொள்கையின் படி $f(x)$ என்பது $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்க சார்பு.

$x \to Ax$ என்பது $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்க சார்பு

$f(x)+Ax$ என்பதும் $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்க சார்பு

$f(x)$ என்பது $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்க சார்பு.

(iii) கொள்கையின் படி

A என்ற மாறிலி $f(a)=f(b)$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

(1) (2) & 3 ன் படி f என்ற சார்பு ரோலின் அனைத்து கட்டுப்பாட்டையும் நிறைவு செய்கிறது.

$\therefore$ ரோலின் தேற்றப்படி

$]a,b[$ல் c என்ற மெய்எண் $f'(c)=0$ என்பது அமைகிறது.

$f'(c)=0 \Rightarrow f(x) = f(x)+A$

$f'(x) = f'(x)+A \Rightarrow f'(x) = f'(c)+A$

$f'(c)+A = 0 \Rightarrow f'(c) = -A \longrightarrow (ii)$

$\Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(a)+Aa = f(b)+Ab$

$Aa+Ab = f(b)-f(a)$

$-A(b-a) = f(b)-f(a)$

$$-A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \longrightarrow (iii)$$

(ii) & (iii) லிருந்து $= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

கோஷியின் இடைமதிப்பு தேற்றம்!

தேற்றம் : 3.1

(i) [a, b] f, g என்பவை தொடர்ச்சியான சார்பு

(ii)]a, b[ல் f, g என்பவை வகையிடத்தக்க சார்பு.

(iii)]a, b[ல் உள்ள எந்த ஒரு x ம் g'(x) = 0 ஆகும்படி f, g என்பவை [a, b] ல் வரையறுக்கப்பட்ட இரு சார்புகள் எனில்]a, b[c என்ற மெய்யெண் ஆனது $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ஆகும்படி அமையும்.

நிரூபணம்:-

கட்டுப்பாடு (i) ன் படி $g(b) \neq g(a)$ ஆகவேண்டும் $g(b) = g(a)$ எனில் g(x) என்ற சார்பிற்கு ரோலின் தேற்றத்தின் 3 கட்டுப்பாடுகளும் பொருந்துகின்றன.

எனவே]a, b[ல் உள்ள x என்ற ஒர் மெய்யெண் ஆனது $g'(x) = 0$ ஆகும்படி அமைகிறது. இது கொடுக்கப்பட்ட கொள்கையால் உள்ள மூன்றாவது கட்டுப்பாட்டிற்கு முரண்பாடாகும்.

$f(b) = g(a)$ என கொண்டு வரு.

$g(b) \neq g(a)$, $g(b) - g(a) \neq 0$.

[a, b] ல் உள்ள அனைத்து x களுக்கும் $F(x) = f(x) + Ag(x)$
$\rightarrow 1$ என வரையறுப்போம். இங்கு A என்பது உகந்த முறையில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டிய மாறிலி.

(i) கொள்கையின்படி f(x), F(x) என்ற இரு சார்புகள்]a, b[ல் வகையிடத்தக்க சார்பாகும்.

$f(x) \neq Ag(x)$ என்ற இரு சார்புகள்]a, b[ல் வகையிடத்தக்க சார்பாகும்.

$f(x)$ என்பது $]a,b[$ ல் வகையிடத்தக்க சார்பாகும்.

(iii) கணக்கிடும்போது, A என்பது மாறிலியாக $F(a)=F(b)$ என அமைத்துக் கொள்வோம். (i), (ii) & (iii) ன்படி $F(x)$ என்பது ரோலின் தேற்றத்தின் அனைத்து கட்டுப்பாடுகளையும் பூர்த்தி செய்கிறது.

∴ ரோலின் தேற்றப்படி $]a,b[$ ல் c என்ற புள்ளியில் $F'(c)=0$ எனும் படி அமைகிறது.

$$F(x) = f(x) + Ag(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x) + Ag'(x)$$

$$F'(c) = f'(c) + Ag'(c)$$

$$f'(c) + Ag'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = -Ag'(c)$$

$$-A = \frac{f'(c)}{g'(c)} \longrightarrow (ii)$$

$$F(a) = F(b)$$

$$f(a) + Ag(a) = f(b) + Ag(b)$$

$$Ag(a) - Ag(b) = f(b) - f(a)$$

$$-A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \longrightarrow (iii)$$

(ii) & (iii) லிருந்து $\Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் : 4.1

டெய்லரின் தேற்றம் அல்லது டெய்லரின் தேற்றத்தை லெக்ராஞ்சியின் மீதி கொண்ட அமைப்புடன் விவரி.

$[a,b]$ல் f என்ற சார்பானது

(i) f^{n-1} என்பது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்பு

என்றால் $]a,b[$ ல் c என்ற மெய்யெண் உள்ளது,

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c).$$ என்பது அமைகிறது.

நிரூபணம் :-

கட்டுப்பாடு (i)ன் படி $f, f', f'' \ldots f^{n-1}$ என்பவை $[a,b]$ல் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பு. எனவே $F(x)$ என்ற சார்பை $[a,b]$ல் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

$$F(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots \frac{(b-x)^n}{(n-1)!} A \quad \ldots 1$$

இங்கு A என்பது உகந்த முறையில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட வேண்டிய மாறிலி.

(i) கட்டுப்பாட்டின் படி $f, f', f'' \ldots f^{n-1}$ என்பவை $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்புகள் மேலும் $x \to (b-x)^k$. $(k = 1,2, \ldots n)$ என்பவை $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்புகள்.

$\therefore F(x)$ என்பது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்பு.

(ii) கட்டுப்பாட்டின் படி $f, f', f'', \ldots f^{n-1}$ என்பவை $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்க சார்பு மேலும்.

$x \to (b-x)^k$. $(k = 1,2, \ldots n)$ என்பவை $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்க சார்பு. $\therefore F(x)$ என்பது $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்க சார்பு உட்படுகிறது.

(iii) $F(x)$ என்ற சார்பு வரையறையால் கட்டுப்பட்ட மாறிலி

(i), (ii), (iii) ன் படி $F(x)$ என்ற சார்பிற்கு ரோலின் தேற்றத்தின்

உள் [a,b]ல் c என்ற ஒரு மெய்யெண்ணை $f'(x)=0$ என்று எடுப்போம்.

$$f(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} f'(x) F'(x) \dots (b-x)^n A.$$

$$F(x) = 0 - F'(x) - \frac{(b-x)}{1!} f'(x)\, F''(x) - F(x) - 1 \cdot \frac{(b-x)^2}{2!} F'''(x)$$

$$- \frac{(F''(x)}{2!}\, 2(b-x)(-1) \dots - \frac{(b-x)^{n-1}}{1!}(-1).$$

$$F'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} F^n(c) + An(b-x)^{n-1}$$

$$F'(c) = 0. \Rightarrow -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} F^n(c) + An(b-c)^{n-1} = 0.$$

$$An(b-c)^{n-1} = \frac{(b-c)^{n-1}}{n-1} Fn(c)$$

$$A = \frac{f^n(c)}{n(n-1)!} = A = \frac{f^n(c)}{n!} = \dots > (ii)$$

இப்போது (i)ல் $x=b$ எனில்

$$F(b) = F(b) - F(b) - \frac{b-b}{1!} F'(b) \dots (b-b)^n A.$$

$F(b) = 0$ ஆனால் $F(a) = F(b)$

$F(a) = 0$, $A = \dfrac{F^n(c)}{n!}$ என (i)ல் பிரதியிட

$$(1) \Rightarrow F(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) \dots \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(x) = 0.$$

$$f(b) - f(a) \cdot \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) +$$

$$\frac{(b-a)^n}{n!} f^n(x).$$

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் : 4.2

காஷியின் மீதி வடிவிலான டெய்லரின் தேற்றம்:

(i) f^{n-1} ஆனது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியான சார்பு

(ii) f^{n-1} ஆனது $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்க சார்பு மற்றும் $[a,b]$ல் f ஆனது வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு எனில் c என்ற எண் ஒன்று

$$F(b) = F(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c)$$

$c \in]a,b[$ என்றபடி அமையும்.

நிரூபணம் :-

$[a,b]$ல் F, g என்பன வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகள் மற்றும்

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) \dots \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x).$$

$$g(x) = (b-x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

(i) 1ம் கட்டுப்பாட்டின் படி

f^{n-1} ஆனது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியானது

F ஆனது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியானது

$\therefore$ g ஆனது $[a,b]$ல் தொடர்ச்சியானது.

(ii) 2ம் கட்டுப்பாட்டின் படி

f^{n-1} ஆனது $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்கது.

F ஆனது $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்கது.

$\therefore$ g ஆனது $]a,b[$ல் வகையிடத்தக்கது.

(iii) கட்டுப்பாட்டின்படி,

$g'(x) \neq 0.$

g மற்றும் f காஷியின் இடைமதிப்பு தேற்றத்தின் படி அனைத்து கட்டுப்பாட்டையும் நிறைவு செய்கிறது.

$]a,b[$ இல் c என்ற மெய்யெண் உள்ளது

$$= \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \longrightarrow ①$$ என்றவாறு அமையும்.

$$f(b) = f(b) - f(b) - (b-b)f'(b) \dots - \frac{(b-b)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(b).$$

$$\therefore f(b) = 0.$$

$$\left. g(b) = b-b = 0 \right\} \longrightarrow (2)$$

$$f(b) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(b) \dots \frac{(b-b)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) \longrightarrow (3)$$

$$g(a) = b-a \longrightarrow (4)$$

$$f'(x) = f'(x) - f'(x) - 1 - (b-x)f''(x) \dots - \frac{(n-1)(b-x)^{n-2}(-1)f(x)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \frac{(b-x)^{n-1}}{n-1} f^{n}(x)$$

$$f'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1} g^{n}(x)}{(n-1)!}$$ மற்றும்

$$g'(x) = -1$$

$$f'(c) = -\frac{(b-c)^{n-1}}{n-1} f^{n}(x)$$ மற்றும் $g(c) = -1$

$$\longrightarrow (5)$$

(2), (3) & (4) & (5) ① ல் பொருத்த

$$\frac{0-f'(a)}{0-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$= f(b) + f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-c)^{n-1}}{n-1}(b-a)f^{n}(a)$$

$$\therefore f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f'(a)$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}(b-a)f^{n}(c).$$

தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

UNIT-V

வரையறை:

ரீமன் மேல் தொகையீடு, ரீமன் கீழ்த்தொகையீடு

[a,b] ன் எல்லா பிரிவுகளுக்கும் $U(P,f)$, $L(P,f)$ என்ற தொகைகள் இரு கணங்களாகும். $\inf U(P,f)$ என்பது [a,b]ல் f ன் ரீமன் மேல் தொகையீடு எனப்படும். இதை $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

அதாவது $\inf U(P,f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

$\sup L(P,f)$ என்பது [a,b]ல் ரீமன் கீழ்த்தொகையீடு எனப்படும். இதை $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

அதாவது $\sup L(P,f) = \underline{\int_a^b} f\,dx$.

வரையறை: ரீமன் தொகையீடு :-

[a,b]ல் வரம்புடைய சார்பு f க்கு $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ என அமைந்துள்ள f என்பது ரீமன் தொகையிடக்கூடிய சார்பு எனப்படும். இந்த பொது மதிப்பு f ன் ரீமன் தொகை எனப்படும். f ன் ரீமன் தொகை

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ எனக் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு: f என்பது [a,b]ல் ரீமன் தொகையிடக்கூடியது எனில் $f \in R[a,b]$ எனக் குறிக்கலாம்.

உதாரணம்:

[0,1] என்ற இடைவெளியில் சமனிச் சார்பானது ரீமன் தொகையிடல் என நிறுவுக. மேலும் $\int_0^1 f(x)dx = 1/2$ ஐக் காண்க.

தீர்வு:

f என்ற சார்பை [0,1] என்ற இடைவெளியின் மீது
$f(x) = 0$. x விகிதமுறு எண்ணாக இருக்கும் பொழுது
$= 1$. x விகிதமுறு எண் இல்லை எனில் என்றவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

x என்பது [0,1]ல் உள்ள ஒரு புள்ளி எனில் f(x)-ன் மதிப்பு 0க்கும் 1க்கும் இடையில் இருக்கும். அதாவது $0 \le f(x) \le 1$. $x \in [0,1]$ இதிலிருந்து f ஆனது வரம்புடையச் சார்பு எனத் தெரிகிறது.

இந்த வரம்புச் சார்பு ரீமன் -தொகையிடல் இல்லை என நிறுவுவதற்கு தயாராவோம்.

$P = \{0 = x_0, x_1, \ldots x_{r-1}, x_r, \ldots x_n = 1\}$ என்பது [0,1] என்ற இடைவெளியில் ஏதேனும் ஒரு பிரிவு என்போம்.

சார்பு f ன் வரையறையிலிருந்து

$M_r = 1, m_r = 0 \ (r = 1, 2, 3 \ldots n)$ எனத் தெளிவாகத் தெரிகிறது.

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf(S(D)) = \lim_{n\to\infty} \left[\tfrac{1}{n}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right] = \tfrac{1}{2} \to (1)$$

$$\& \quad \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup[s(D)] = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{2} \to (2)$$

(1) & (2) லிருந்து $\underline{\int_0^1} f\,dx = \overline{\int_0^1} f(x) = \tfrac{1}{2}$.

6.3 டார்பாக்ஸ் தேற்றம்:-

தேற்றம்: $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் f என்ற சார்பு வரம்புடையதாகவும், தொகையிடத்தக்கதாகவும் உள்ளது எனில் அனைத்து $\epsilon > 0$ $\exists\; \delta > 0$ எனில்

(i) $S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon \quad \forall D$ with $|D| \le \delta$

(ii) $s(D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \epsilon \quad \forall D,\ |D| \le \delta$.

நிரூபணம்:

$|f(x)| \le k \quad \forall x \in [a,b]$ என்க.

δ என்பது D என்ற இடைவெளியில் ஒரு positive எண்ணாக எடுத்துக் கொள்ளவும். மேலும் $|D_1| \le \delta$. D_2 என்பது D_1 ஐ அடக்கிய ஒரு பிரிவாக கருதவும்.

இங்கு D_1 என்பது D ன் ஒரு பிரிவு ஆகும். D என்பது கொடுக்கப்பட்ட $[a,b]$ என்ற இடைவெளியின் ஒரு பிரிப்பட்ட இடைவெளி ஆகும்.

இங்கே நாம் $S(D_1) - 2pk \leq S(D_2) \leq S(D_1)$

என நிறுவ வேண்டும்.

$\therefore D_2 \supseteq D_1 \Rightarrow S(D_2) \leq S(D_1)$.

M_x, M_x', M_x'' என்பவை $\delta x, \delta x', \delta x''$ ன் மேல்வரம்புகள் ஆகும்

$$\therefore S(D_1) - S(D_2) = M_x \delta x - (M_x' \delta x' + M_x'' \delta x'')$$

$$= (M_x - M_x')\delta x' + (M_x - M_x'')\delta x''$$

$|f(x)| \leq k, \forall x \in [a,b] \Rightarrow -k \leq M_x' \leq M_x \leq k$.

f என்பது வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு ஆகும். $\exists : k > 0$
$\ni : |f(x)| \leq k \; \forall x \in [a,b]$.

$\therefore \int_a^b f(x)\,dx$ என்பது தொகையீடு ஆகும். மேலும்
இது மேல் வரையறை தொகுதி என்பதாகும்.

$S(D_1) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon/2$

$S(D) - 2(p-1)k\delta \leq S(D_2) \leq S(D)$

மேலும் $D_2 \supseteq D_1 \Rightarrow S(D_2) \leq S(D_1)$

$S(D) - 2(p-1)k\delta \leq S(D_1) \Rightarrow S(D) \leq 2(p-1)k\delta + S(D_1)$
$< \epsilon/2 + \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon/2 = \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon$.

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம்: தொகையிடுதலுக்கான நிபந்தனை தேற்றம்:

ஒரு எல்லைக்குட்பட்ட செயல்பாட்டின் தொகையிடுதலுக்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை என்னவென்றால் $\epsilon > 0$ ஒவ்வொரு பகிர்வுக்கும் (D) $\delta > 0$ எனில் Oscillatory sum $\omega(D) < \epsilon$.

நிரூபணம்: **தேவையான நிபந்தனை:**

வரம்புகளுடைய சார்பு தொகையிடத்தக்கது எனில்

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

$\epsilon > 0$ என்க. டார்பாக்ஸ் தேற்றத்தின் படி $\exists: \delta > 0 \ni: \|D\| \le \delta$.

$$\therefore \begin{cases} S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon/2 = \int_a^b f(x)dx + \epsilon/2 \\ s(D) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon/2 = \int_a^b f(x)dx - \epsilon/2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \epsilon/2 < s(D) \le S(D) < \int_a^b f(x)dx + \epsilon/2.$$

$$\Rightarrow \omega(D) = S(D) - s(D) < \epsilon \quad \forall \ \|D\| \le \delta.$$

போதுமான நிபந்தனை:

$\epsilon > 0$ என்க $\exists: D \ni:$

$$S(D) - s(D) = \left[S(D) - \overline{\int_a^b} f(x)dx\right] + \left[\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx\right] + \left[\underline{\int_a^b} f(x)dx - s(D)\right] < \epsilon.$$

$$\therefore S(D) - \overline{\int_a^b} f(x)dx,\ \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx,\ \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(D) \ge 0$$

$$\therefore 0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon.$$

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx - \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \geq 0 \quad \text{since } \epsilon > 0$$

$$\therefore \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx.$$ f ஒரு தொகையிடத்தக்க சார்பு.

தொகையிடத்தக்க சார்புகளின் பண்புகள்:-

(i) சார்பு f ஆனது வரம்புக்குட்பட்டதும் தொகையிடத்தக்கதுமான [a,b] ல் உள்ளது. மேலும் [a,c] மற்றும் [c,b] என்ற இடைவெளிகளிலும் இது பண்பில் உள்ளது எனில் c என்ற புள்ளி [a,b] என்ற இடைவெளியில் உள்ளது எனலாம். மேலும் மாறாக சார்பு f ஆனது வரம்புக்குட்பட்டது, தொகையிடத்தக்கதாக [a,c] & [c,b] என்ற இடைவெளிகளில் உள்ளது எனில் [a,b] என்ற இடைவெளியிலும் அது பண்புடன் உடையதாக உள்ளது எனலாம்.

(ii) தொகையிடுதலுக்கான கூடுதல் மற்றும் கழித்தல் பண்புகள்:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

(iii) தொகையிடுதலுக்கான பெருக்கல் விதி

(iv) Quotient விதி

(v) Modulus விதி

(vi) சமன்கள் விதி