SEMESTER : **V**
CORE COURSE : **X**

Inst Hour	: 7
Credit	: 6
Code	: 18K5M10

STATICS

UNIT1:
Forces Acting at a Point – Parallel forces.
(Chapter2: & Chapter 3: Sections 1 to 6)

UNIT 2:
Moment of a Force about a point on a line – Theorem on Moments & Couples
(Chapter 3: sections 7 to 14 & Chapter 4)

UNIT 3:
Equilibrium of three forces acting on a Rigid body –Coplanar forces (Simple Problems only).
(Chapter 5: section 1to7, Chapter 6: Section 1to 13)

UNIT 4:
Equilibrium of Strings under gravity – Common Catenary –Parabolic Catenary –Suspension Bridge.
(Chapter 11)

UNIT 5:
Friction – Laws of Friction –Coefficient of Friction, Angle & Cone of Friction – Equilibrium of a particle on a rough inclined plane under a force parallel to the plane and under any force – Problems on Friction. (Simple Problems only)
(Chapter 7: Sections 1to13)

Text Book

[1] M.K. Venkataraman, Statics, Agasthiar Publication,18th Edition, 2016

Books for Reference

[1] S.Narayanan., Statics.

[2] A.V.Dharmapadham, Statics.

Question Pattern (Both in English & Tamil Version)

Section A : 10 x 2 = 20 Marks, 2 Questions from each Unit.
Section B : 5 x 5 = 25 Marks, EITHER OR (a or b) Pattern, One question from each Unit.
Section C : 3 x 10 = 30 Marks, 3 out of 5, One Question from each Unit.

10.2022

9.3

UNIT - 3

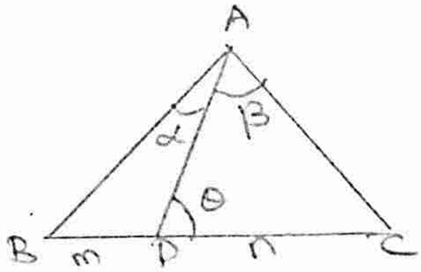
1. இரு திரிகோணமிதியின் சூத்திரங்கள் !-

முக்கோணம் ABC-ல் அடிப்பக்கம் BC-ஐ பிரிக்கும் வகையில் உள்ளதும் ஒரு புள்ளி D என்க் கொண்டால் $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$ மற்றும் $A\hat{D}C = \theta$, $B\hat{A}D = \alpha$, $D\hat{A}C = \beta$

எனில் $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta \rightarrow (1)$

$(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C \rightarrow (2)$

நிறுவல் !-



(i) $\frac{m}{n} = \frac{BD}{DC}$

$$= \frac{BD}{DA} \cdot \frac{DA}{DC}$$

$$= \frac{\sin B\hat{A}D}{\sin A\hat{B}D} \cdot \frac{\sin A\hat{C}D}{\sin D\hat{A}C}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} \times \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta} \quad \left[\because \angle ACD = 180^\circ - (\theta-\beta)\right]$$

$$= \frac{\sin\alpha(\sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta)}{\sin\beta(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\cos\alpha)}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\cot\beta + \cot\theta}{\cot\alpha - \cot\theta}$$ (தொகுதி மற்றும் பகுதியை $\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$ ஆல் வகுக்க)

$$m(\cot\alpha - \cot\theta) = n(\cot\beta + \cot\theta)$$

(2)

$$m\cot\alpha - m\cot\theta = n\cot\beta + n\cot\theta.$$

$$m\cot\alpha - n\cot\beta = m\cot\theta + n\cot\theta.$$

$$m\cot\alpha - n\cot\beta = m\cot\alpha - n\cot\beta$$

அதாவது $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta.$

மேலும் $$\frac{m}{n} = \frac{\sin B\hat{A}D}{\sin A\hat{B}D}\cdot\frac{\sin A\hat{C}D}{\sin D\hat{A}C}.$$

$$= \frac{\sin(\theta - B)}{\sin B}\cdot\frac{\sin C}{\sin(C+\theta)} \quad \left[\because D\hat{A}C = 180^\circ - (\theta + C)\right]$$

$$= \frac{\sin C\,(\sin\theta\cos B - \cos\theta\sin B)}{\sin B\,(\sin C\cos\theta + \cos C\sin\theta)}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\cot B - \cot\theta}{\cot\theta + \cot C}$$ (தொகுதி பகுதி இரண்டையும் $\sin B\sin C\sin\theta$ - ஆல் வகுக்க)

$$m(\cot\theta + \cot C) = n(\cot B - \cot\theta)$$

$$m\cot\theta + m\cot C = n\cot B - n\cot\theta.$$

$$m\cot\theta + n\cot\theta = n\cot B - m\cot C.$$

$$(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C.$$

2. எடுத்துக்காட்டு : 1. கம்பி ஒருமுனையானது
l நீளமுடைய கம்பத்தினை
சுவற்றின் மீது பொருத்தப்பட்டு அதன் மறுமுனை
l நீளமுடைய கயிற்றால் கட்டப்பட்டு கயிற்றின்
மறுமுனை செங்குத்து சுவற்றோடு கட்டப்பட்டு
உள்ளது. சுவற்றோடு θ கோணம் உண்டாக்கும்

நிலையில் கம்பி அசைவற்ற நிலையில் இருந்தால் (3)

$\cos^2\theta = \dfrac{l^2-a^2}{3a^2}$ எனக் காட்டுக. மேலும் சமநிலையில்

$a : l$ விகிதத்தின் எல்லை பெறுமானங்களையும் காண்க.

தீர்வு :-

AB என்ற கம்பியின் நீளம் a எனவும், மைய ஈர்ப்பு விசை G எனவும் BC என்ற கயிற்றின் நீளம் l எனவும் கொண்டால் கம்பியின் மீது செயல்படும் விசைகள் முறையே

(i) அதன் எடை W ஆனது G வழியே கீழ் நோக்கியும்

(ii) A யிலுள்ள எதிர்விசை R_A ஆனது சுவருக்கு செங்குத்தாகவும், கிடைக்கோடாகவும்.

(iii) கயிற்றின் இழுவிசை T ஆனது BC வழியாகவும் செயல்படுகிறது.

இந்த மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் இருக்க வேண்டுமெனில் படத்தில் காட்டியபடி விசைகள் L என்ற புள்ளி வழி செல்ல வேண்டும். மேலும் விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருக்கக் கூடாது.

கயிறானது செங்குத்துடன் உருவாக்கும் கோணம் α எனில் $A\hat{C}B = \alpha = G\hat{L}B$.

மேலும் $L\hat{G}B = 180^\circ - \theta$ மற்றும் $A\hat{L}G = 90^\circ$

முதல் திரிகோணமிதி தேற்றத்தின் படி,

$AG : GB = 1 : 1$ எனக் கொண்டால்,

$(1+1)\cot(180° - \theta) = 1.\cot 90° - 1.\cot\alpha.$ (4)

$2(-\cot\theta) = -\cot\alpha.$

$-2\cot\theta = -\cot\alpha.$

$2\cot\theta = \cancel{1}\cot\alpha$

$2\cot\theta = \cot\alpha \longrightarrow$ (1)

$BD \perp CA$ ആണല്ലോ.

മട്ടത്രികോണം ത്രികോണത്തിൽ CDB-ൽ,

$BD = BC.\sin\alpha$

$= l.\sin\alpha.$

മട്ടത്രികോണം ത്രികോണത്തിൽ ABD-ൽ

$BD = AB\sin\theta$

$= a\sin\theta.$

$\therefore l\sin\alpha = a\sin\theta \longrightarrow$ (2)

(1), (2) ൽ നിന്ന് ഗണം

$\operatorname{Cosec}^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha \longrightarrow$ (3)

(2) ൽ നിന്ന് $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\theta}{l}.$

$\operatorname{Cosec}\alpha = \dfrac{l}{a\sin\theta} \longrightarrow$ (4)

(4), (1) ഉം (3)-ൽ ആദേശിച്ചാൽ

$$\frac{l^2}{a^2\sin^2\theta} = 1 + 4\cot^2\theta$$

(ie) $$\frac{l^2}{a^2} = \sin^2\theta\left[1 + \frac{4\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right]$$

$$= \sin^2\theta + 4\cos^2\theta.$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 3\cos^2\theta$$

$$\frac{l^2}{a^2} = 1 + 3\cos^2\theta.$$

$$3\cos^2\theta = \frac{l^2 - a^2}{a^2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2} \rightarrow (5).$$

அனைத்தும் கோணங்களில் இருக்க $\cos^2\theta$-ன் மதிப்பு மிகை மதிப்பாகவும் ஒன்றைவிட குறைவாகவும் இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore l^2 - a^2 > 0.$$

(i) $l^2 > a^2$ (or) $a^2 < l^2$

மேலும் $\frac{l^2 - a^2}{3a^2} < 1$

(i) $l^2 - a^2 < 3a^2$ (அல்லது) $l^2 < 4a^2$

(i) $a^2 > l^2/4$.

$\therefore$ a^2-ன் மதிப்பு $l^2/4$ மற்றும் l^2-க்கு இடையில் அமையும்.

$\frac{a^2}{l^2}$ -ன் மதிப்பு $\frac{1}{4}$ மற்றும் 1க்கு இடையில் அமையும்.

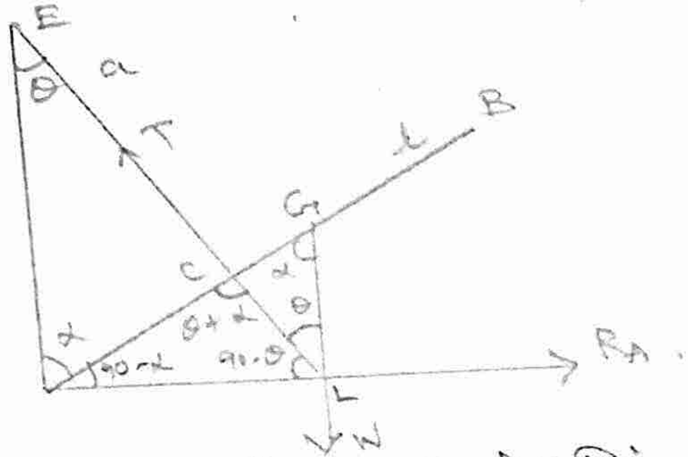
(அல்லது) $\frac{a}{l}$ -ன் மதிப்பு $1/2$ மற்றும் 1க்கு இடையில் அமையும்.

8. எடுத்துக்காட்டு :

2l நீளமுடைய சீரான கோல் ஒன்று கீழ்முனை ஒப்பமான கிடைத்தளத்தை தொட்டுக்கொண்டு வைக்கப்பட்டுள்ளது. a நீளம் உடைய கயிற்றின் ஒரு முனை கோலில் கட்டப்பட்டு மறுமுனை கோலின் கீழ் முனையிலிருந்து b தூரத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளியோடு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கயிறு நிலைக்குத்தோடு உருவாக்கும் θ எனில்,

$$\cos^2\theta = \frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2 l(2b-l)}$$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-



கோல் AB-ன் மீது செயல்படும் விசைகள் முறையே (i) A யிலிருந்து எதிர்விசை R_A தரைக்கு செங்குத்து திசையிலும், கிடைக்கோட்டிற்கு செயல்படும்

(ii) AB-ன் மையப்புள்ளி G வழியே எடை W கீழ்நோக்கி செலுத்தப்படுகிறது.

(iii) CE வழியாக கயிற்றின் இழுவிசை T செயல்படுகிறது.

(i) மற்றும் (ii) இரண்டு நிலைகளும் L ஏற்ற (7)
புள்ளியில் சந்திக்கும். மூன்று விசைகளும் பொருளின்
மீது செயல்பட்டு பொருளை சமநிலையில் வைக்கு
இருக்கின்றன இருந்தால் T புள்ளி L வழிச் செல்லும்.

$AC = b$, $CE = a$ மற்றும் $AG = l = GB$.
இங்கு $E\hat{A}B = \alpha$ எனில் $C\hat{G}L = \alpha$.
$C\hat{L}G = \theta$ மற்றும்
$C\hat{L}A = 90' - \theta$,
$C\hat{A}L = 90' - \alpha$.

ΔACE -ல்

$$\frac{AC}{\sin\theta} = \frac{EC}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{b}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

$$b\sin\alpha = a\sin\theta \rightarrow (1).$$

ΔACL-ல்

$$\frac{CL}{\sin(90' - \alpha)} = \frac{AC}{\sin(90' - \theta)}$$

$$(\text{or}) \quad \frac{CL}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\theta} \quad (\text{அல்லது}) \quad CL = \frac{b\cos\alpha}{\cos\theta} \rightarrow (2)$$

ΔCGL-ல்

$$\frac{CL}{\sin\alpha} = \frac{CG}{\sin\theta}$$

$$\therefore CL = CG \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}.$$

$$= (AG - AC)\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$= (l - b)\sin\alpha / \sin\theta \rightarrow (3)$$

② හා ③ සිට ලැබෙන,

$$(l-b)\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} = b\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}.$$

(ie) $$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \left(\frac{l-b}{b}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

(ie) $$\cot\alpha = \left(\frac{l-b}{b}\right)\cot\theta \rightarrow ④.$$

① හා ④ විසඳීමෙන් α ඉවත් කිරීම,

$$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1+\cot^2\alpha.$$

(ie) $$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\cot^2\alpha.$$

(ie) $$\frac{1}{\left(\frac{a\sin\theta}{b}\right)^2} = 1+\left(\frac{l-b}{b}\cot\theta\right)^2$$

(① හා ④ ආදේශ කිරීම)

$$\frac{b^2}{a^2\sin^2\theta} = 1+\frac{(l-b)^2}{b^2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \sin^2\theta\left[1+\frac{(l-b)^2}{b^2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right]$$

$$= \sin^2\theta + \frac{(l-b)^2}{b^2}\cos^2\theta.$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1-\cos^2\theta + \frac{(l-b)^2}{b^2}\cos^2\theta.$$

$$\cos^2\theta - \frac{(l-b)^2}{b^2}\cos^2\theta = 1-\frac{b^2}{a^2}$$

$$\cos^2\theta\cdot\left(1-\frac{(l-b)^2}{b^2}\right) = 1-b^2/a^2$$

$$\cos^2\theta\left(\frac{b^2-(l-b)^2}{b^2}\right)=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

$$\cos^2\theta=\frac{a^2-b^2}{a^2}\times\frac{b^2}{b^2-(l-b)^2}.$$

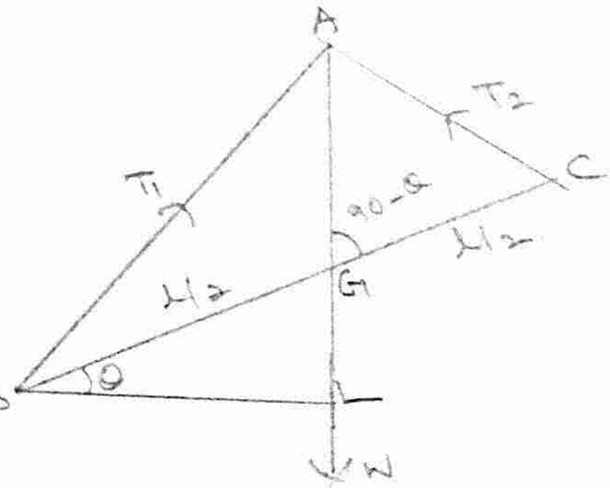
$$=\frac{b^2-(a^2-b^2)}{a^2\left(b^2-(l^2-2bl+b^2)\right)}$$

$$=\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2\left[b^2-l^2+2bl-b^2\right]}$$

$$=\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2(2bl-l^2)}=\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2 l(2b-l)}.$$

4. எடுத்துக்காட்டு !- l நீளமுடைய W எடை கொண்ட ஒரு சீரான கம்பி a, b நீளமுடைய இரு கயிறுகளினால் இணைக்கப் பட்டு கயிற்றின் மறுமுனை ஆணியோடு இணைக்கப் பட்டுள்ளது. கம்பி தரையோடு உண்டாக்கும் கோணம் $\sin^{-1}\left[(a^2-b^2)/l\left(\sqrt{2(a^2+b^2)-l^2}\right)\right]$ என நிறுவுக. மேலும் கயிறுகளின் இழுவிசையைக் காண்க.

தீர்வு !-



கோட்டு BC-ன் நடுப்புள்ளி G என்க. BA = a, AC = b

கோடுகளின் கீழ் கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் தொகுதியை (10)

(i) BA வழியாக இழுவை T_1

(ii) CA வழியாக இழுவை T_2

(iii) G வழியாக எடை W ஆனது நிலைக்குத்தாக

கொடுக்கப்படுகிறது.

(i) மற்றும் (ii) A-ல் சந்திக்கும். AG ஆனது

BC நிலைக்குத்து கொடுக்கப்படுகிறது.

∴ BC ஆனது கிடைக்கோட்டுடன் உருவாக்கும்

கோணம் θ ஆகும்.

$BL \perp AG$ வரைக.

இரு முறைகளில் BL-ன் மதிப்பை கண்டுபிடிப்போம்.

ΔBGL-ல், $BL = BG.\cos\theta$

$= \frac{l}{2}\cos\theta \rightarrow (1)$.

ΔABL-ல் $BL = AB.\cos A\hat{B}L$

$= a.\cos(B+\theta)$

$= a(\cos B\cos\theta - \sin B\sin\theta) \rightarrow (2)$

(1) & (2) சமன்படுத்த

$\frac{l}{2}\cos\theta = a\cos B\cos\theta - a\sin B\sin\theta$.

$a\sin B\sin\theta = a\cos B\cos\theta - \frac{l}{2}\cos\theta$

$= \cos\theta\left(a\cos B - \frac{l}{2}\right) \rightarrow (3)$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\cos B - \frac{l}{2}}{a\sin B}$$

$$= \frac{2a\cos B - l}{2a\sin B}$$

(i) $\tan\theta = \dfrac{2a\cos B - l}{2a\sin B} \rightarrow (4)$

(4) லிருந்து $\sin\theta$-ன் மதிப்பை கண்டுபிடிப்போம்.

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$$

((4) ஐ பயன்படுத்தி)

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4a^2\sin^2 B}{(2a\cos B - l)^2}}}$$

$$= \frac{2a\cos B - l}{\sqrt{(2a\cos B - l)^2 + 4a^2\sin^2 B}}$$

$$= \frac{2a\cos B - l}{\sqrt{4a^2(\cos^2 B + \sin^2 B) - 4al\cos B + l^2}}$$

$$= \frac{2a\cos B - l}{\sqrt{4a^2 - 4al\cos B + l^2}} \rightarrow (5).$$

ΔABC-ல் $b^2 = a^2 + l^2 - 2al\cos B$.

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + l^2 - b^2}{2al} \rightarrow (6).$$

(6)-ன் மதிப்பை (5) ல் பிரதியிட,

$$\sin\theta = \frac{2a\left(\dfrac{a^2+l^2-b^2}{2al}\right) - l}{\sqrt{4a^2 - 2al\left(\dfrac{a^2+l^2-b^2}{2al}\right) + l^2}}.$$

$$= \frac{\frac{a^2+l^2-b^2}{l} - l}{\sqrt{4a^2 - 2(a^2+l^2-b^2) + l^2}}$$

$$= \frac{a^2+l^2-b^2-l^2/l}{\sqrt{4a^2-2a^2-2l^2+2b^2+l^2}}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{l\sqrt{2a^2+2b^2-l^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{a^2-b^2}{l\sqrt{2(a^2+b^2)-l^2}}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{a^2-b^2}{l\sqrt{2(a^2+b^2)-l^2}}\right).$$

UNIT - 4

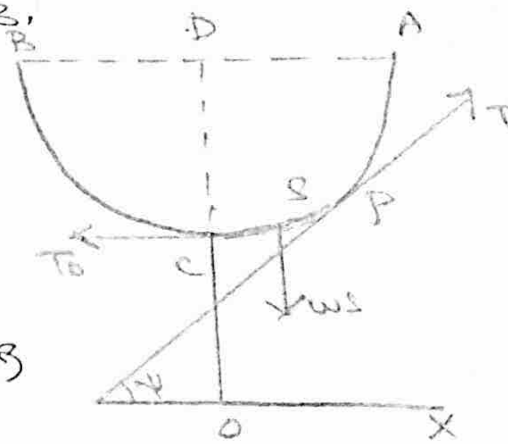
சங்கிலியம் - வரையறை

ஒரு சீரான இழை (String) அல்லது சங்கிலி ஆனது ஒரே கிடைக் கோட்டிலமையாத இரு புள்ளிகளுக்கிடையே, புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக தொங்கும் போது அவ்விழை பெற்றுள்ள வளை வளைவை சங்கிலியம் அல்லது கயிற்று வளை என்கிறோம்.

அவ்விழையின் ஒவ்வொரு அலகு நீளத்தின் எடை மாறாதிருப்பின் அச்சங்கிலியத்தை சீர் சங்கிலியம் என்கிறோம். அல்லது பொதுச் சங்கிலியம் என்கிறோம்.

பொதுச் சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு காணல்.

ஒரு சீரான கனமுடைய, மீள் தன்மையற்ற இழையானது புவியீர்ப்பு விசை காரணமாக தங்கு தடையின்றி தொங்குகிறது. அவ்விழை பெற்றுள்ள வளையின் சமன்பாடு காண்க.



(AO'B) என்பது ஒரு கிடைக் கோட்டில் அமையாத A, B என்ற இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கும் சீரான இழை என்க. (O') என்பது அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி.

O' வழி வரையப்படும் செங்குத்து கோடு y அச்சு எனவும், புள்ளி O' க்கு கீழ் c ஆழத்தில் கிடையாக வரையப்படும் கோடு x அச்சு எனவும் கொள்க.

தொடு புள்ளி O ஆக இருக்கட்டும். ②

இழையின் P என்னும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை $O'P = s$ என்றவாறு எடுத்துக் கொள். இவ்வாறு அலகு நீளத்தின் எடை W எனக் கொண்டால் வில் $O'P$ ன் எடை Ws ஆகும்.

இழைக்கு P யில் வரையப்படும் தொடுகோடு x அச்சுடன் ψ கோணத்தை ஏற்படுத்தலாம்.

வில் பகுதி $O'P$ மீது செயல்படும் விசைகள்

(i) P-யில் தொடு கோடு வழி செயல்படும் இழுவிசை T.

(ii) O'-யில் தொடுகோடு வழி செயல்படும் இழுவிசை (T_0)

(iii) பகுதி $O'P$-யின் புவியீர்ப்பு மையம் வழி அதன் எடை Ws வில் பகுதி $O'P$ சமநிலையில் இருக்க இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்ல வேண்டும். விசைகளை கிடைமட்டமாகவும், செங்குத்தாகவும் பிரிக்க.

$$T\cos\psi = T_0 \rightarrow (1)$$

$$T\sin\psi = Ws \rightarrow (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \quad \tan\psi = \frac{Ws}{T_0} \rightarrow (3)$$

மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி O' யிலுள்ள இழுவிசை T_0 ஆனது c நீளமுள்ள இழையின் எடைக்குச் சமமாகக் கொண்டால்

$$T_0 = Wc \text{ ஆகும்} \rightarrow (4)$$

இதை (3) ல் பிரதியிட

$$\tan\psi = \frac{Ws}{T_0} = \frac{s}{c}.$$

(ie) $S = c\tan\psi \rightarrow (5)$. (3)

இதுவே கம்பியின் உள்ளியல்பு சமன்பாடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

l நீளமுள்ள ஒரு சீர் கம்பியானது ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப் படுகின்றது. ஒவ்வொரு இறுதி முனையிலும் உள்ள இழுவிசையை இழுவிசை மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழுவிசையைப் போல் n மடங்கு எனின் வளைவு விட்டம் $\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\log(n+\sqrt{n^2-1})$ எனக்காட்டு.

தீர்வு: l - நீளமுள்ள சீர் கம்பி ACB என்க. A, C யில் இழுவிசைகள் முறையே T, T_0 என்க.

கொள்கைப்படி $T = nT_0$.

$$T = wy_A.$$

$T_0 = wc$ என அறிவோம்.

$\therefore (1) \rightarrow wy_A = nw_c$.

$$y_A = nc.$$

மேலும் $y^2 = c^2 + s^2$

$$\therefore T_A^2 = c^2 + s_A^2$$

$$n^2c^2 = c^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$c^2(n^2-1) = \left(\frac{l^2}{4}\right)$$

(ie) $c^2 = \frac{l^2}{4\cdot(n^2-1)}$

$$c = \frac{1}{2\sqrt{(n^2-1)}}$$

எனவே $x = c \log \left(\frac{y+s}{c} \right)$

$$x_A = c \log \left(\frac{y_A + s_A}{c} \right)$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}} \log \left(\frac{nc + l/2}{\frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}} \right)$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}} \log \left(\frac{2nc + l}{\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}} \right)$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}} \log \left(\frac{n \cdot \frac{l}{\sqrt{n^2-1}} + l}{\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}} \right)$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}} \log \left(\frac{nl + l\sqrt{n^2-1}}{l} \right)$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}} \log \left(n + \sqrt{n^2-1} \right).$$

தூணைகு இடைபட்டம்.

$$AB = 2x_A.$$

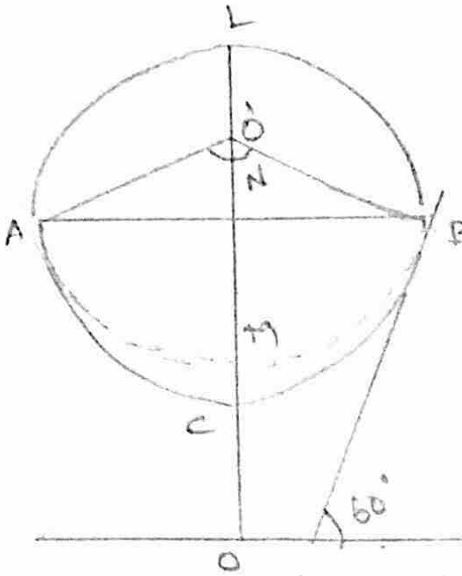
$$= 2 \left[\frac{l}{2\sqrt{n^2-1}} \log \left(n + \sqrt{n^2-1} \right) \right]$$

$$= \frac{l}{\sqrt{n^2-1}} \log \left(n + \sqrt{n^2-1} \right).$$

எடுத்துக்காட்டு : 3.

முழுவதுமாக ஒரு சங்கிலி a ஆரமுடைய வட்டக்கம்பியின் மீது போடப்படுகிறது. சங்கிலியின் ஒரு பகுதி கம்பியின் 2/3 சுற்றளவோடு ஒட்டிக் கொண்டுள்ளது எனில் சங்கிலியின் நீளம் $a\left[\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})}+\frac{4\pi}{3}\right]$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-



a ஆரமுள்ள MBLA என்ற வட்டத்தின் மீது முழுவதுமாக சங்கிலி CBLAC தொங்க விடப்பட்டு உள்ளது என்க.

$$ALB\text{-ன் பகுதி} = \frac{2}{3} \times \text{கம்பியின் சுற்றளவு}$$

$$= \frac{2}{3} \times 2\pi a$$

$$= \frac{4\pi a}{3}.$$

மீதமுள்ள ACB -ன் பகுதி C-யை கீழ் முனை புள்ளியாக கொண்ட சங்கிலியத்துடன் இணைக்கப்பட்டு உள்ளது.

$A\hat{O'}B = 120^\circ$, $O'\hat{B}A = 30^\circ$

B-யில் தொடுகோடானது AO'B க்குச் செங்குத்தாகவும் (6)

அது கிடைக்கோட்டோடு உண்டாக்கும் கோணம்

60° ஆகவும் இருக்கும்.

O-வை ஆதியாகவும் C க்கு கீழே அமைந்த அடிக்கோட்டை C எனவும் கொள்வோம். சங்கிலியம் மற்றும் வட்டத்தின் தொடும் புள்ளி B என்க.

B யிலிருந்து x அச்சின் புள்ளி $= NB = O'B \cos 30°$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

B சங்கிலியத்தின் மீதும் அமைந்துள்ளதால்

$$x = c\log(\sec\psi + \tan\psi) \rightarrow (1).$$

B யிலிருந்து (1) ஐ பிரதியிட இங்கு $\psi = 60°$.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = c\log(\sec 60° + \tan 60°)$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = c\log(2+\sqrt{3})$$

$$c = \frac{a\sqrt{3}}{2\log(2+\sqrt{3})} \rightarrow (2).$$

$$s = c\tan\psi \rightarrow (3).$$

B யிலிருந்து (3) ஐ பிரதியிட

CB-ன் நீளம் $= s = c\tan 60°$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2\log(2+\sqrt{3})}\cdot\sqrt{3}.$$

$$= \frac{3a}{2\log(2+\sqrt{3})}$$ = AC-ன் நீளம்.

$\therefore$ சங்கிலியத்தின் நீளம் $= \frac{4\pi a}{3} + 2 \cdot \frac{3a}{2\log(2+\sqrt{3})}$

$$= \frac{4\pi a}{3} + \frac{3a}{\log(2+\sqrt{3})}$$

$$= a\left[\frac{4\pi}{3} + \frac{3}{\log(2+\sqrt{3})}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு : 4.

a அலகு இடைவெளியில் உள்ள இரு நேர்க்குத்து கம்பங்களுக்கு இடையே கட்டப்பட்ட கம்பி ஒன்றின் n அலகு தொய்வடைந்துள்ளது, அதன் நிலைப்புள்ளியின் இழுவிசை $w\left(\frac{a^2}{8n} + \frac{7n}{6}\right)$ என நிறுவுக. w என்பது ஓரலகு நீளமுடைய கம்பியின் எடை.

தீர்வு :

சங்கிலியத்தின் மேல் மட்ட புள்ளி A, தாழ்ந்த புள்ளி C என்க.

$$y = c\cosh x/c$$

A யிடத்து $x = a/2$.

A யிடத்து $y = c\cosh \frac{(a/2)}{c}$

$$= c\cosh a/2c.$$

$$= c\left[\frac{e^{(a/2c)} + e^{-a/2c}}{2}\right]$$

$$= \frac{c}{2}\left[\left(1 + \frac{a}{2c} + \frac{a^2}{8c^2} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{a}{2c} + \frac{a^2}{8c^2} \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{c}{2} \cdot 2\left[1 + \frac{a^2}{8c^2} + \frac{a^4}{384c^4} + \cdots\right]$$

$$= c + \frac{a^2}{8c} + \frac{a^4}{384c^3} + \dots \rightarrow (1).$$

மேலும் A லிருந்து $y = c + n \rightarrow (2)$

(இதில் n என்பது தொய்வு)

(1), (2) லிருந்து.

$$c + n = c + \frac{a^2}{8c} + \frac{a^4}{384c^3} + \dots$$

$$(அ) \quad n = \frac{a^2}{8c} + \frac{a^4}{384c^3} + \dots (3).$$

(3)-ல் முதல் பகுதியை மட்டும் கருதுவோம் எனில் c ன் மதிப்பு மிக அதிகமாகவும் n-ன் மதிப்பு மிக குறைவாகவும் காணப்படுகிறது எனில்,

$$n = \frac{a^2}{8c} \quad (அல்லது) \quad c = \frac{a^2}{8n} \rightarrow (4).$$

$$c = \frac{a^2}{8n} + h \rightarrow (5) \text{ என்க.}$$

இதில் h ன் மதிப்பு மிக குறைவு.

(5) ன் மதிப்பை (3)-ல் பிரதியிட,

$$n = \frac{a^2}{8\left(\frac{a^2}{8n} + h\right)} + \frac{a^4}{384\left\{\frac{a^2}{8n}\left(1 + \frac{8nh}{a^2}\right)\right\}^3}$$

$$= \frac{a^2}{8 \cdot \frac{a^2}{8n}\left(1 + \frac{8nh}{a^2}\right)} + \frac{a^4}{384\left\{\frac{a^2}{8n}\left(1 + \frac{8nh}{a^2}\right)\right\}^3}$$

$$= n\left(1 + \frac{8nh}{a^2}\right)^{-1} + \frac{a^4\, 64 \times 8n^3}{384 \times a^6}\left(1 + \frac{8nh}{a^2}\right)^{-3}.$$

$$= n\cdot\left(1-\frac{8nh}{a^2}\right)+\frac{4n^3}{3a^2}\left(1-\frac{3\times 8nh}{a^2}\right)$$

h. இனுடைய மதிப்பு மிகச் சிறியது எனவே, h^2, h^3,.. போன்றவற்றை நீக்கலாம்.

$$(\text{ie})\quad n = n-\frac{8n^2h}{a^2}+\frac{4n^3}{3a^2}-\frac{32n^4h}{a^4}$$

$$0 = n^2\cdot\left(-\frac{8h}{a^2}+\frac{4n}{3a^2}-\frac{32n^4h}{a^4}\right)$$

$$(\text{ie})\quad -\frac{8h}{a^2}+\frac{4n}{3a^2}-\frac{32n^2h}{a^4}=0 \rightarrow (6)$$

h மிகச்சிறியது n-ன் மதிப்பு மிகச்சிறியது ஆகையால் n^2 நீக்கப்படுகிறது.

$$-\frac{8h}{a^2}+\frac{4n}{3a^2}=0$$

$$h=\frac{n}{6} \rightarrow (7)$$

(5) லிருந்து $c = \frac{a^2}{8n}+\frac{n}{6} \rightarrow (8)$

(2) லிருந்து A யின் $y = \left(\frac{a^2}{8n}+\frac{n}{6}\right)+n.$

$$= \frac{a^2}{8n}+\frac{7n}{6}$$

∴ A யின் இருப்பு $= w\left(\frac{a^2}{8n}+\frac{7n}{6}\right)$

ஆகும்.

UNIT-5

உராய்வு.

1. உராய்வு — வரையறை:

இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் போது, ஒன்றின் மேலொன்று நழுவி நகர்ந்திருக்கும் அல்லது, அவ்விரு பொருள்களுக்கிடையே இயக்கத்தைச் செயற்படும் ஒர் விசையே உராய்வு எனப்படும். அவ்வியக்கத்தை நிறுத்திக்கும் உராய்வு எனப்படும்.

2. நிலையியல் உராய்வு, இயக்கவியல் உராய்வு, எல்லை உராய்வு வரையறை.

ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின் மேல் சரியாக அசைவற்றிருக்கும் போது, இவ்விரு பொருள்களுக்கு இடையே செயற்படும் உராய்வினை கட்டுநிலைக்கு போதுமாக எனப்படும். இவ்வாறு உராய்வு நிலை உராய்வு இருக்கும்.

ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின் மேல் நகரத் துவங்க ஆரம்பித்து நகர்ந்து செல்லும்போது நகர்ச்சியை எதிர்த்து செயல்படும் உராய்வினை இயக்க உராய்வு எனப்படும்.

ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின் மேல் சரியாக நழுவும் நிலையில் இருக்கும் போது, சமநிலை எல்லையடைகின்றது. அப்போது ஏற்படும் உராய்வு எல்லை உராய்வு எனப்படும்.

3. உராய்வுக் கெழு:

எல்லையுராய்வானது செங்குத்து விசைக்கு கொள்ளும் மாறா விகிதம் உராய்வுக் கெழு எனப்படும். இதை μ என்பதனால் குறிப்பது மரபு.

சமநிலை எல்லையுறு நிலையில் இருக்கும் போது
உராய்வு விசை F செங்குத்துத் தாக்கம் R எனில்
$\frac{F}{R} = \mu$ ஆகும்.
(அ) $F = \mu R$ ஆகும்.

4. உராய்வுக் கூம்பு – வரையறை.

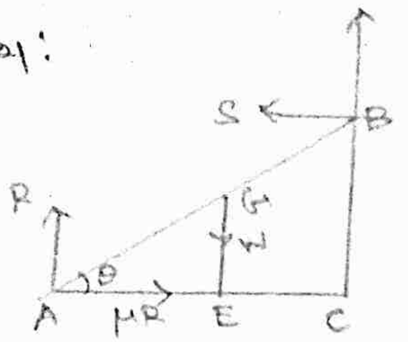
ஒரு பொருளின் தொடுபுள்ளியை உச்சியாகவும் (vertex) தொடுபுள்ளியிலிருந்து பொதுச் செங்குத்துக்கோட்டை அச்சாகவும் (axis) உராய்வுக் கோணத்தை அரை உச்சிக் கோணமாகவும் (semi vertical angle) கொண்டு ஒரு கூம்பை வரைந்தால் அக்கூம்பை உராய்வுக் கூம்பு என்கிறோம்.

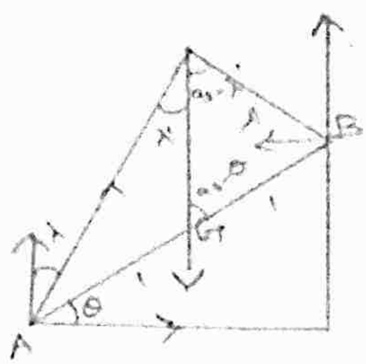
5. உராய்வுக் கோணம் – வரையறை.

ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின் மேல் சமநிலை எல்லையுறும் போது, உராய்வும், செங்குத்துத் தாக்கமும் ஒரு தனி விசையாகச் சேர்க்கப்படுவதால் தொடு புள்ளியிலிருந்து செங்குத்தோடு இவ்விசை உண்டாக்கும் கோணம் உராய்வுக்கோணம் எனப்படும். இதை λ என்பதால் குறிப்பது மரபு.

6. ஒரு சீரான ஏணி அதன் ஒரு நுனி தரையின் மீதும் மற்றொரு நுனி செங்குத்தான சுவர் மீதும் இருக்கும் போது சமநிலையிலுள்ளது. தரை மற்றும் சுவற்றின் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே μ, μ' எனில் ஏணி இரு முனைகளிலும் வழுக்கும் நிலையிலிருக்கும் போது கிடைமட்டத்துடன் உருவாக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{1-\mu\mu'}{2\mu}\right)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:





இங்கு AB என்பது ஏணியின் அமைப்பாகும். இதில் G யை ஈர்ப்பு மையமாகவும் எடை W ஆகவும் கொள்வோம். தரையிலும் சுவற்றிலும், செங்குத்து எதிர்ச்செயல்கள் R மற்றும் S ஆகும்.

ஏணியின் கீழ்முனை A சுவற்றிலிருந்து நழுவ ஆரம்பிக்கும் போது உராய்வு விசையானது AC திசையில் அமையும். மேல்முனை B கீழ் நோக்கி நழுவ ஆரம்பிக்கும் போது இதன் உராய்வு மேல் நோக்கிய திசையில் இருக்கும்.

இருமுனைகளும் நழுவ ஆரம்பிக்கும் போது உராய்வுகள் A மற்றும் B யிலும் எல்லை உராய்வாக அமையும்.

இவை படத்தில் μR, $\mu' S$ என்று காட்டப்பட்டு உள்ளது. கிடைமட்டமாக பிரித்து எழுத,

$$S = \mu R \rightarrow (1)$$

நேர்குத்தாக பிரித்து எழுத, $\mu' S + R = W \rightarrow (2)$

A யைப் பொறுத்து திருப்புத்திறன்,

$$S \cdot BC + \mu' S \cdot AC = W \cdot AE$$

(i.e.) $S \cdot 2a\sin\theta + \mu' S \cdot 2a\cos\theta = W \cdot a\cos\theta \rightarrow (3)$

S-ன் மதிப்பை (2)ல் பிரதியிட,

$$\mu'\mu R + R = W.$$

(i.e) $R = \dfrac{W}{1+\mu\mu'} \rightarrow (4)$

(1) லிருந்து $S = \dfrac{\mu W}{1+\mu\mu'} \rightarrow (5)$

S-ன் மதிப்பை (3)ல் பிரதியிட

$$S.2\sin\theta + \mu' S.2\cos\theta = W\cos\theta.$$

$$\frac{\mu W}{1+\mu\mu'} 2\sin\theta + \mu' . \frac{\mu W}{1+\mu\mu'} 2\cos\theta = W\cos\theta.$$

$$\mu W(2\sin\theta) + \mu'.\mu W 2\cos\theta = (1+\mu\mu') W\cos\theta.$$

$$2\mu\sin\theta + 2\mu\mu'\cos\theta = (1+\mu\mu')\cos\theta.$$

(i.e) $2\mu\sin\theta = (1-\mu\mu')\cos\theta.$

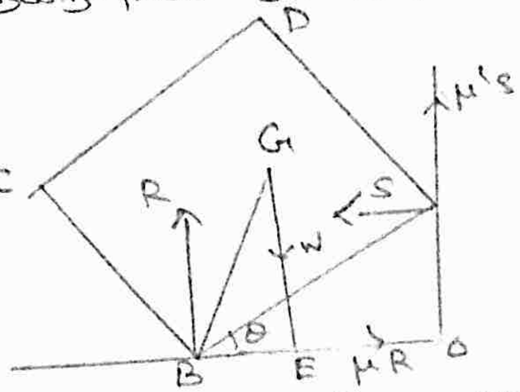
(or) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1-\mu\mu'}{2\mu} = \tan\theta.$

$$\tan\theta = \frac{1-\mu\mu'}{2\mu} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1-\mu\mu'}{2\mu}\right).$$

7. ஒரு சீரான சதுரத் தகடு ஒரு செங்குத்துச் சுவரிலும் கிடைத்தரையிலும் ஒவ்வொரு முனை தொட்டுக்கொண்டு செங்குத்துத் தளத்தில் நிற்கிறது. சுவர், தரை சொரசொரப்பு ஆனவை. தரை, சுவரின் உராய்வுக் கெழுக்கள் முறையே μ, μ' தகடு இயங்கும் நிலையில் தரையுடன் தகட்டின் பக்கம் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-\mu\mu'}{1+2\mu+\mu\mu'}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு:- ABCD என்பது சீரான சதுரத் தகடு.

கரடு தரையுடன் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் θ என்க



R, S என்பன A, B யில் செங்குத்துத் தாக்கங்கள்.

G புவியீர்ப்பு மையம் W அதன் எடை சதுரத்தின்

பக்கம் a என்க.

பொருள் மீது செயல்படும் விசைகள்

(i) எடை W ஆனது புவியீர்ப்பு மையம் G யில்

நேர் கீழ்நோக்கி

(ii) முனை A யில் செங்குத்துத் தாக்கம், R

(iii) முனை A யில் உராய்வு விசை μR கிடைமட்ட நோக்கி

(iv) முனை B யில் உராய்வு விசை $\mu' S$ நேர் மேல்

நோக்கி.

விசைகளை கிடை, செங்குத்து திசைகளில் பிரிக்க

$$S = \mu R \rightarrow (1)$$

$$R + \mu' S = W \rightarrow (2)$$

முனை A யைப் பற்றி விசைகளின் திருப்புத்திறன்

காண $S \cdot (OB) + \mu' S (AO) = W (AM)$

$$S\, AB \sin\theta + \mu' S\, AB \cos\theta = W\, AG \cdot \cos(\theta + 45)$$

$$S \cdot a \sin\theta + \mu' S \cdot a \cos\theta = W \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \left[\cos\theta \cos 45 - \sin\theta \sin 45\right]$$

$$S[\sin\theta + \mu' \cos\theta] = \frac{W}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right] \quad (6)$$

$$S[\sin\theta + \mu' \cos\theta] = \frac{W}{2}[\cos\theta - \sin\theta] \rightarrow (3)$$

(2) லிருந்து $R = W - \mu' S$.

இதை (1) ல் பிரதியிட $S = \mu[W - \mu' S]$

$$S[1 + \mu\mu'] = \mu W.$$

$$S = \frac{\mu W}{1 + \mu\mu'}$$

இதை (3) ல் பிரதியிட

$$\frac{\mu W}{1+\mu\mu'}[\sin\theta + \mu' \cos\theta] = \frac{W}{2}[\cos\theta - \sin\theta]$$

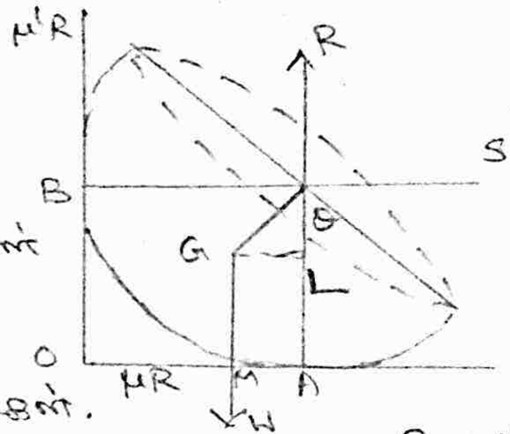
$$2\mu[\sin\theta + \mu'\cos\theta] = (1+\mu\mu')(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$[2\mu + 1 + \mu\mu']\sin\theta = (1 + \mu\mu' - 2\mu\mu')\cos\theta.$$

$$\tan\theta = \frac{1 - \mu\mu'}{1 + 2\mu + \mu\mu'}.$$

8. திண்மத் திண்ம அரைக் கோளமொன்று உராய்வுடைய ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீதும், ஒப்பமான ஒரு சுவருக் கெதிராகவும் கிடக்கின்றது. உராய்வுக் குணகம் 3/8 ஐ விடச் சிறியதாயின், அரைக் கோளத்தின் அடிப்பக்க நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{8\mu}{3}\right)$ என நிறுவுக. சுவரும் உராய்வுடையது எனில் இக்கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{8\mu}{3} \times \frac{1+\mu'}{1+\mu\mu'}\right)$ என நிறுவுக.

அரைக் கோளவடிவத் திண்மம், சுவருடன் தொடும் புள்ளிகள் A, B என்க. அரைக் கோளத்தின் ஆரம் a என்க. எடை W என்க. தரை, சுவரின் உராய்வுக் குணகங்கள் μ, μ' என்க.



பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகள்.

(i) அதன் எடை W ஆனது புவியீர்ப்பு மையம் G வழி நேர் கீழ் நோக்கி

(ii) தொடுபுள்ளி A யில் செங்குத்துத் தாக்கம் R.

(iii) புள்ளி A யில் உராய்வு விசை μR சுவரை நோக்கி.

(iv) தொடு புள்ளி B யில் செங்குத்துத் தாக்கம் S.

(v) புள்ளி B யில் உராய்வு விசை $\mu' S$ மேல் நோக்கி.

விசைகளை கிடை, செங்குத்து திசைகளில் பிரிக்க

$$S = \mu R \longrightarrow (1)$$

$$R + \mu' S = W \longrightarrow (2).$$

புள்ளி A யைப் பற்றி திருப்பு திறன் காண

$$W(AM) = S(OB) + \mu' S \cdot (AO)$$

$$W(GL) = S(AC) + \mu' S \cdot (CB)$$

$$W(OG \cdot \cos\theta) = Sa + \mu' Sa.$$

$$\frac{3}{8} a\cos\theta = (1+\mu') aS.$$

$$\frac{3W}{8}\cos\theta = (1+\mu')S.$$

(2) லிருந்து $R = W - \mu' S.$

(1)ல் பிரதியிட

$$S = \mu(W - \mu' S)$$

$$(1+\mu\mu')S = \mu W$$

$$S = \frac{\mu W}{1+\mu\mu'}$$

இதை (3)ல் பிரதியிட

$$\frac{3W}{8}\cos\theta = (1+\mu')\frac{\mu W}{1+\mu\mu'}$$

$$\cos\theta = \frac{8\mu}{3}\cdot\frac{(1+\mu')}{(1+\mu\mu')}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{8\mu}{3}\cdot\frac{(1+\mu')}{(1+\mu\mu')}\right] \longrightarrow (4)$$

சீரான் ஒப்பமாட்டுப்பானது எனில் $\mu' = 0.$

$$\theta = \cos^{-1}\left(8\mu/3\right) \text{ ஆகும்.}$$